SULLA PROPRIETÀ CONGLOMERATIVA DELLE PROBABILITÀ SUBORDINATE

In: « *Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* », 1930, vol. LXIII, fasc. 6-10, pp. 3-7.

REALE ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti* — Vol. LXIII - Fasc VI-X — 1930.

SULLA PROPRIETÀ CONGLOMERATIVA DELLE PROBABILITÀ SUBORDINATE

Nota del dott. Bruno de Finetti

ULRICO HOEPLI
LIBRAIO DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
—
MILANO
1930 — Anno VIII

Sunto. — Se la probabilità di un evento, subordinatamente a una qualunque delle ipotesi possibili (in numero finito) è sempre $= p$ ($\geqq p$), anche la probabilità dell'evento è $= p$ ($\geqq p$). Questa proprietà evidente (proprietà *conglomerativa*) sembrerebbe dover valere anche quando il numero delle ipotesi possibili è infinito, ma, in generale, ciò non è vero. Essa sussiste però in un caso notevole.

1. Sia E un evento, ed $E_1, E_2, \ldots, E_n$ una classe finita e completa di eventi tra loro incompatibili (tali cioè che di essi si deve necessariamente verificarne uno e uno solo). Se π_i è la probabilità dell'evento E_i ($\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = 1$), e p_i la probabilità di E subordinatamente ad E_i, è noto che la probabilità di E è

$$p = \pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 + \ldots + \pi_n p_n$$

e quindi

$$p' \geqq p \geqq p''$$

se con p' si indica là minima, con p'' la massima, delle probabilità p_i. In particolare, se è $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, risulta

$$p = p_1 = p_2 = \ldots = p_n .$$

Tale fatto costituisce, espresso sotto forma solo apparentemente più generale, quella che diremo « proprietà *conglomerativa* » delle probabilità subordinate:

se, subordinatamente a una qualunque delle ipotesi incompatibili $E_1 \ldots E_n$ *(in numero finito), l'evento* E *ha sempre probabilità* $= p$ ($\geqq p$), *esso ha ancora probabilità* $= p$ ($\geqq p$) *subordinatamente all'ipotesi che si verifichi una purchessia delle ipotesi* $E_1 \ldots E_n$.

La proprietà generale, che si ottiene ponendo $\geqq p$ in luogo di $= p$, si può scrivere anche ponendo invece $\leqq p$: le due forme sono ovviamente equivalenti come risulta cambiando E nell'evento contrario « non E » (— E).

Volendo scrivere tale proposizione in simboli, si può indicare colla notazione

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}\right)$$

la probabilità dell'evento E subordinatamente all'evento E'.

Allora la proprietà conglomerativa dice che se E' è la somma logica di un numero finito di eventi incompatibili $\mathrm{E}_1 \ldots \mathrm{E}_n$, e se, qualunque sia i ($i = 1, 2, \ldots, n$) si ha

$$p' \leqq \mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_i}\right) \leqq p''$$

(oppure, se in particolare $p' = p'' = p$, si ha $\mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_i}\right) = p$) è anche

$$p' \leqq \mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}\right) \leqq p''$$

(e rispettivamente $\mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}\right) = p$).

Ci proponiamo di vedere se la condizione che le ipotesi $\mathrm{E}_1 \ldots \mathrm{E}_n$ siano in numero finito è effettivamente necessaria, o se il teorema vale anche quando esse sono in numero infinito. Sembrerebbe ovvio ammetterlo, e confesso che anch'io, pur dopo aver dimostrato in altri precedenti lavori (1) quanto poco in tali questioni ci si possa fidare dell'intuizione, dell'analogia e dei passaggi al limite, pensavo che questa « proprietà conglomerativa » sarebbe stata l'unica proposizione del genere che avrebbe dovuto resistere all'indagine critica che mi ero proposta. Gli esempi semplicissimi che seguono mostrano invece che nemmeno quella proprietà sussiste più quando il numero delle ipotesi è infinito: nemmeno nel caso più semplice in cui si tratti soltanto di un'infinità numerabile. Questo ri-

(1) *Sulle probabilità numerabili e geometriche*, Rend. R. Ist. Lombardo, Vol. LXI, Fasc. XVI-XX, 1928; *Sui passaggi al limite nel calcolo delle probabilità*, id. id., Vol. LXIII, Fasc. II-V-1930.

sultato mi sembra tanto più notevole quanto più sembra contrario all'intuizione: nell'enunciato verbale della proprietà conglomerativa può addirittura sfuggire, a un lettore poco attento o poco sottile, la differenza fra la premessa e la tesi.

2. Sia N un numero *scelto a caso*. Con tale locuzione intendiamo, come d'uso, che la probabilità che N appartenga a una certa classe di numeri u è uguale al limite (ogni qualvolta esso esiste) della frequenza degli u nei primi n numeri, quando $n \longrightarrow \infty$. Per il nostro scopo ci basta in questo momento la condizione, assai meno restrittiva, che tutti i numeri siano ugualmente probabili (1).

Dividiamo i numeri naturali in un'infinità di classi C_1 C_2 ... C_n ... ad esempio nel modo seguente:

$$(1, 2, 4)\ ,\ (3, 6, 8)\ ,\ (5, 10, 12)\ ,\ (7, 14, 16)\ ,\ \ldots,\ (2n-1,\ 4n-2,\ 4n)\ ,\ \ldots$$

È ovvio che il numero N scelto a caso dovrà appartenere a una e una sola di tali classi, e, subordinatamente all'ipotesi che appartenga a una determinata di tali classi, ha probabilità $= {}^1/_3$ d'essere dispari. Se valesse anche per classi infinite la proprietà conglomerativa dovremmo concludere che la probabilità che N sia dispari è $= {}^1/_3$. Ma, operando diversamente la scomposizione in classi, si poteva concludere che tale probabilità è uguale a un altro numero razionale p comunque prefissato: se $p = \dfrac{h}{h+k}$, bastava formare C_1 coi primi h numeri dispari e i primi k numeri pari, e in generale C_n coll'n-esimo gruppo di h numeri dispari e l'n-esimo gruppo di k numeri pari. E si ha così un assurdo.

(1) Due eventi con probabilità nulla si dicono ugualmente probabili (secondo la definizione che diedi nella nota citata *Sulle probabilità numerabili e geometriche*) quando sono uguali le loro probabilità subordinatamente all'ipotesi che uno almeno di essi si verifichi (subordinatamente alla loro somma logica). In simboli, se

$$\mathbf{P}\left(\frac{E_1}{E_1 \smile E_2}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{E_2}{E_1 \smile E_2}\right).$$

Gli esempi si potrebbero moltiplicare (1): eccone un altro facilissimo.

Siano N, M due numeri scelti a caso, indipendentemente l'uno dall'altro. Poichè, assegnato un numero n (comunque grande), un numero scelto a caso ha sempre probabilità nulla d'essere $\leq n$ (casi favorevoli n, in numero finito; casi contrari infiniti) è chiaro che, supposto noto il valore di N, la probabilità che $M \leq N$ è nulla. È cioè nulla la probabilità della disuguaglianza $M \leq N$ subordinatamente a una qualunque delle ipotesi possibili $N = 1$, $N = 2$, $N = 3, \ldots$ Usando della proprietà conglomerativa si dedurrebbe che è nulla la probabilità che $M \leq N$, ma un ragionamento analogo ci condurrebbe a concludere pure che è nulla la probabilità che sia $N \leq M$, e cioè ad un assurdo.

3. La proprietà conglomerativa sussiste anche per le classi infinite sotto una condizione che possiamo chiamare di *sommabilità*. Diremo *somma* delle probabilità di una classe infinita di eventi incompatibili il limite superiore delle somme delle probabilità delle sottoclassi finite (2), limite superiore che è ovviamente compreso fra 0 e 1 (estremi inclusi). Diremo che in una classe infinita di eventi la probabilità è *sommabile* se la probabilità della somma logica (*che è necessariamente non minore* della *somma* delle probabilità) *è uguale* alla somma delle probabilità.

In tal caso la somma logica della classe infinita si può approssimare comunque si vuole con una somma logica di un numero finito di eventi (in modo cioè che la probabilità della somma logica degli eventi trascurati sia minore di un ε pre-

(1) Si avverta che il ragionamento ora svolto riferendoci, per fissare le idee, al carattere « dispari », si può ripetere per l'appartenenza a una qualsiasi classe di numeri u, purchè infinita insieme alla classe complementare.

(2) Se la classe è numerabile, la somma così definita è la somma della serie, che è assolutamente convergente. A questo caso si può ridurre anche il caso generale, perchè in una classe infinita di eventi incompatibili quelli con probabilità non nulla costituiscono al più una sottoclasse numerabile (gli eventi con probabilità $\geq \frac{1}{n}$ non potendo essere che n al più), e dagli altri, per la determinazione della *somma*, si può prescindere.

fissato). La dimostrazione precedentemente data per il caso delle classi finite mostra allora che la proprietà vale anche in questo caso (a meno d'un errore che si può dimostrare esser minore di un numero piccolo quanto si vuole, e che quindi non esiste).

Supponiamo ad esempio che i casi possibili $E_1\, E_2 \ldots E_n \ldots$ abbiano probabilità uguale a $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ (1). La somma delle probabilità è 1, e quindi la probabilità è sommabile nella classe considerata. Allora, se un evento E ha probabilità $= p$ subordinatamente a uno qualunque degli E_h,

$$\mathbf{P}\left(\frac{E}{E_h}\right) = p \qquad (h = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

la probabilità di E è $= p$.

Roma, 29 gennaio 1930 (A. VIII).

(1) Ad. es.: E_n significhi che, giocando a *testa e croce*, si abbia per la prima volta *testa* all'n-esimo colpo.

Estratto dai *Rendiconti* del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.
Serie II, Vol. LXIII, Fasc. VI-X.

PAVIA — PREMIATA TIPOGRAFIA SUCCESSORI FRATELLI FUSI