SULLE OPERAZIONI FINANZIARIE

In: *«Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari»*, Roma, 1935, Anno VI,
n. 4, pp. 289-302

B. DE FINETTI

Sulle operazioni finanziarie

Estratto dal *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*
Anno VI, n. 4, ottobre 1935-XIII

ROMA
ISTITUTO ITALIANO DEGLI ATTUARI
22, VIA MARCO MINGHETTI
1936-XIV

Roma, 1936-XIV. — Tipografia del Senato del dott. G. Bardi.

SULLE OPERAZIONI FINANZIARIE

B. DE FINETTI.

SUNTO. — Considerazioni generali sulle operazioni finanziarie e sulla condizione di non–incongruenza.

1. L'impostazione data, in un precedente lavoro [1], al problema della non–incongruenza fra i valori di riscatto, e in particolare la considerazione ivi introdotta dei « sistemi conservativi e dissipativi », possono utilmente avere applicazioni nella matematica finanziaria per chiarire, da un altro punto di vista, dei concetti già noti e per estendere lo studio a casi più generali.

Le operazioni finanziarie si riducono a scambi di denaro; a volerle considerare nella loro accezione più larga possibile, potremo anzi definire appunto le operazioni finanziarie come quei contratti di scambio in cui non figura nessuna merce fuorchè il denaro. In tale senso larghissimo rientrano ad esempio fra le operazioni finanziarie anche le assicurazioni: una prima distinzione va fatta quindi tra le operazioni finanziarie *certe* e *aleatorie*, e cioè tra le operazioni finanziarie in cui tutti gli importi sono fissati fin dalla stipulazione del contratto, e il loro pagamento ed ammontare non sono subordinati nè dipendono da nessuna circostanza aleatoria, e quelle in cui invece circostanze « aleatorie » (e cioè « di esito non noto alle parti all'atto della stipulazione del contratto ») hanno un'influenza. In questa definizione delle operazioni aleatorie rientrano non soltanto i casi tipici delle assicurazioni (in cui il pagamento dipende dal verificarsi del sinistro e l'ammontare talvolta dall'entità del danno o da altre circostanze) e delle operazioni con sorteggi (dalle lotterie ai buoni rimborsabili per estrazione oppure dotati di premio), ma anche il caso degli investimenti azionari (perchè il dividendo dipende dai risultati dell'esercizio) ed

---

[1] B. DE FINETTI e S. OBRY, *L'optimum nella misura del riscatto*, « Atti del Secondo Congresso Nazionale di Scienza delle Assicurazioni », vol. II, pag. 99.

altri analoghi. A rigore si potrebbe anzi sostenere il carattere aleatorio di qualsiasi operazione finanziaria, perchè il soddisfacimento di ogni obbligazione è subordinato alla possibilità materiale di farvi fronte, e si ha quindi a tener conto degli eventi aleatori costituiti da fallimenti o dissesti. Dal punto di vista matematico la definizione sarebbe quindi da precisare nel senso che un'operazione si considera aleatoria o certa a seconda che degli elementi aleatori si tiene o non si tiene conto nell'impostazione; dal punto di vista giuridico, sarebbe da distinguere se le circostanze aleatorie rientrano nei casi contemplati come normali dal contratto, oppure riguardano soltanto i casi di forza maggiore che rendono impossibile la esecuzione del contratto.

Un'altra distinzione dobbiamo fare: tanto un'operazione certa che una aleatoria può essere *rigida* o *elastica*: la diremo elastica se il contratto lascia la facoltà di scegliere tra diverse alternative in un istante successivo a quello della stipulazione, la diremo rigida se, al contrario, tutto è stabilito alla stipulazione in modo unico ed irrevocabile. Operazioni aleatorie elastiche sono ad esempio le assicurazioni con diritto ad opzioni; operazioni aleatorie rigide le rendite vitalizie. Operazioni certe elastiche sono ad esempio i depositi a risparmio, perchè la data del ritiro delle somme depositate è libera; operazioni certe rigide le obbligazioni a reddito e scadenza fissi, senza premio. Un'operazione che, come le ordinarie assicurazioni sulla vita, sia riscattabile, è ovviamente, per questo stesso fatto, elastica, a meno che il riscatto non possa essere considerato come una seconda operazione che annulla, da un certo momento in poi, la precedente.

2. Ci occuperemo delle operazioni certe rigide; la più generale operazione di questo tipo consiste nello scambio, stipulato in un certo istante t, fra due certi insiemi di pagamenti non anteriori a t.

Indicheremo con $S_i^{(t_i)}$ il pagamento di una somma S_i nello istante t_i; se S_i è positivo, $S_i^{(t_i)}$ indica un credito per la somma S_i esigibile all'istante t_i; se S_i è negativo, $S_i^{(t_i)}$ indica un debito per la somma $|S_i|$ che scade all'istante t_i. La situazione di un individuo rispetto a un ente finanziario verso il quale, all'istante t, esso ha dei debiti e crediti $S_1^{(t_1)}, S_2^{(t_2)}, \dots, S_n^{(t_n)}$, è data dall'insieme

$$S = S_1^{(t_1)} + S_2^{(t_2)} + \dots + S_n^{(t_n)};$$

naturalmente $t_i \geq t$, e potremo supporre $t \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$.

Una operazione finanziaria rigida certa consiste ora nel passaggio dall'insieme S a un altro

$$S' = S_1'^{(t_1')} + S_2'^{(t_2')} + \cdots + S_{n'}'^{(t_{n'}')};$$

se indichiamo (come nel lavoro citato nella nota [1]) con $Q_t(S, S')$ il prezzo nell'istante t del passaggio dall'insieme S ad S', assegnare la tariffa delle operazioni finanziarie certe rigide nell'istante t significa stabilire la funzione Q_t. La scelta di Q_t dipende, come è noto, da fattori economici, per quanto riguarda il livello di rendimento del denaro, dipende in gran parte da sistemi consuetudinari per quanto riguarda la forma. Per occuparsene, come vogliamo fare, da un punto di vista generale ed astratto, mostreremo dapprima quali restrizioni per Q_t siano *a priori* necessarie per evitare incongruenze, vedremo poi quali altre sia praticamente necessario aggiungere per tener conto di fondamentali caratteristiche delle operazioni finanziarie, e studieremo infine come casi particolari quelli caratterizzati da ulteriori restrizioni significative ma di natura più speciale.

Poichè nel seguito considereremo sempre operazioni effettuabili in un medesimo istante t, ometteremo (meglio: sottintenderemo) l'indice t a Q_t, e supporremo anzi, senza perdere in generalità, $t = 0$.

La «non-incongruenza» significa che se il prezzo del passaggio da S ad S' è q, non deve essere possibile effettuare il medesimo passaggio con prezzo inferiore a q attraverso passaggi intermedi (da S ad S_1, da S_1 ad S_2, $\cdots$, da S_{n-1} ad S_n, da S_n ad S'). Si vede subito per induzione che la condizione si può esprimere più semplicemente riferendola a un solo passaggio intermedio, perchè essa è equivalente a quella indicata: basta quindi che non sia possibile ottenere un vantaggio passando da S ad S' attraverso S''. In formule:

$$Q(S, S'') + Q(S'', S') \geqq Q(S, S').$$

Conseguenza immediata e importante è la relazione $Q(S, S') + Q(S', S) \geqq 0$, che diremo, per motivi che appariranno in seguito, condizione di *non-antidissipatività*; in particolare se il prezzo di un passaggio è negativo quello del passaggio opposto è necessariamente positivo.

Possiamo aggiungere senz'altro una restrizione di significato addirittura banale e che diremo *postulato dei segni*: se il passaggio da S ad S' consiste nell'aggiunta di una somma negativa, il prezzo è certamente negativo. Ciò vuol dire insomma che posso ottenere un aumento di un debito o una diminuzione di un credito incassando qualche cosa. Che inversamente per l'aggiunta di una somma positiva il prezzo è positivo, discende subito per la condizione di non–antidissipatività. E un'altra restrizione aggiungiamo subito, benchè di senso molto più profondo: il *postulato del rendimento del denaro*, secondo cui il prezzo di un'operazione consistente nel differire il termine di un credito (o anticipare quello di un debito) è negativo (inversamente, quindi, per anticipare il termine di un credito (o differire quello di un debito) il prezzo è positivo. Questa restrizione costituisce piuttosto un dato di fatto d'ordine storico che non una necessità logica più o meno evidente: si potrebbe in teoria immaginare benissimo una situazione economica in cui, nessuno o pochissimi avendo bisogno di denaro a prestito, non si troverebbe convenienza ad accettare un importo impegnandosi a restituirlo più tardi accresciuto, e nemmeno per restituirlo intero, ma solo detraendo un certo importo per la custodia.

Questi due postulati equivalgono, subordinatamente alla condizione di non–incongruenza, alla proprietà seguente: se scriviamo per disteso

$$Q(S, S') = Q(S_1^{(t_1)} + S_2^{(t_2)} + \cdots + S^{(t_n)} \ , \ S_1'^{(t')} + S_2'^{(t_2')} + \cdots + S_{n'}'^{(t_{n'}')})$$

considerando Q come funzione dei $2(n + n')$ parametri S_i, t_i, S'_i, t'_i, Q è funzione decrescente degli S_i, crescente degli S'_i, crescente o decrescente di t_i a seconda che $S_i > 0$ oppure $S_i < 0$, decrescente o crescente di t'_i a seconda che $S'_i > 0$ oppure $S'_i < 0$. La proprietà, così espressa, sembra complicata solo perchè il modo più naturale e anche più generale di esprimerla si ha basandosi su un concetto di cui sarà utile fare uso sistematicamente. Essendo

$$S = S_1^{(t_1)} + S_2^{(t_2)} + \cdots + S_n^{(t_n)}$$

una situazione finanziaria qualsiasi, indichiamo con $S(\tau)$ la « funzione di ripartizione » del sistema S, ponendo, per τ istante qualunque, $S(\tau)$ = somma degli S_i per tutti i $t_i \leq \tau$. Avremo $S(\tau) = 0$ per $\tau < t_1$, $S(\tau) = S_1$ per $t_1 \leq \tau < t_2$, $S(\tau) = S_1 + S_2$ per $t_2 \leq \tau < t_3, \cdots, S(\tau) = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ per $\tau \geq t_n$. Ogni insieme di pagamenti S è perfettamente caratterizzato dalla funzione di ripartizione $S(\tau)$, e inversamente ogni funzione che varia solo per discontinuità a sinistra rappresenta, secondo la definizione, un insieme ben determinato di prestazioni. È ovvio poi che volendo studiare anche insiemi continui di pagamenti (che costituiscono ovviamente dei casi limite idealizzati), basta considerare anche funzioni di ripartizione continue.

La somma di due funzioni di ripartizione $S(\tau) + \bar{S}(\tau)$ rappresenta il sistema $S + \bar{S}$ *somma* di S e $\bar{S}$, quale si sarebbe potuto definire direttamente; lo stesso dicasi per la differenza $S - \bar{S}$ e la moltiplicazione per una costante $k \times S$. Riguardo alla differenza $S - \bar{S}$, è utile distinguere quattro casi: se essa è sempre nulla si ha $S = \bar{S}$, se è sempre positiva o nulla si dirà che S è *superiore* a $\bar{S}$, se è negativa o nulla che S è *inferiore* a $\bar{S}$ (ciò che equivale a dire che $\bar{S}$ è *superiore* a S), mentre se la differenza assume entrambi i segni si dirà che S ed $\bar{S}$ si *intersecano*.

La precedente proprietà si esprime allora semplicemente dicendo che $Q(S, S')$ cresce quando al posto di S si sostituisce un $\bar{S}$ inferiore ad S e quando al posto di S' si sostituisce un $\bar{S}'$ superiore ad S'. Tale condizione equivale, subordinatamente a quella di non-incongruenza, alla seguente: *se S è superiore a S' è $Q(S, S') < 0$*; da ciò scende infatti

$$Q(S, S') \leq Q(S, \bar{S}) + Q(\bar{S}, S') < Q(\bar{S}, S')$$

per $\bar{S}$ inferiore ad S; e

$$Q(S, S') \leq Q(S, \bar{S}') + Q(\bar{S}', S') < Q(S, \bar{S}')$$

per $\bar{S}'$ superiore ad S', come era da dimostrare. Ma i due postulati precedenti dicono che $Q(S, S')$ è negativo: in forza del primo, quando $S(\tau) - S'(\tau)$ ha un solo punto di discontinuità, e il salto ivi è negativo; in forza del secondo, quando $S(\tau) - S'(\tau)$ è una costante negativa in un certo intervallo (a, b), ed è nulla a sinistra di a e a destra di b. Se S è superiore a S', $S'(\tau) - S(\tau)$ è negativo o nullo (ed è nullo per $\tau < t$); si può quindi evidentemente scomporre $S'(\tau) - S(\tau)$ nella somma di tante funzioni quanti sono i salti, di cui l'ultima con un unico salto negativo (eventualmente nullo), e le altre ovunque nulle tranne in un solo intervallo in cui hanno un valore costante negativo: basta porre $S'(\tau) - S(\tau) = g_1(\tau) + g_2(\tau) + \cdots + g_n(\tau)$ con $g_i(\tau) = S'(\tau) - S(\tau)$ per $t_i \leq \tau < t_{i+1}$ (rispettivamente per $t_n \leq \tau$, se $i = n$), e $g_i(\tau) = 0$ altrove. Il passaggio da S a S', attraverso i passaggi intermedi per gli insiemi corrispondenti ad $S + g_1$, $S + g_1 + g_2$, $\cdots$, $S + g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1}$ ha prezzo negativo (essendo negativo il prezzo di ogni singolo passaggio), e quindi *a fortiori* negativo deve risultare, per la condizione di non-incongruenza, il prezzo del passaggio diretto da S ad S'.

3. Abbandonando ora il piano della più vasta generalità su cui ci siamo fin qui mantenuti, cerchiamo di arrivare rapidamente a caratterizzare le condizioni corrispondenti a quello che nella citata memoria sull'*optimum* del riscatto si era chiamato «criterio II» [2], e che consiste nel fissare sistematicamente i prezzi dei passaggi fra due insiemi S ed S' al limite più basso compatibile col prezzo di acquisto e di riscatto dei due insiemi.

Per prezzo d'acquisto d'un insieme S si definisce $P(S) = Q(O, S)$, prezzo del passaggio dall'insieme nullo O ad S; analogamente per prezzo di riscatto di S si definisce $R(S) = -Q(S, O)$. A parità di prezzi e riscatti, il modo più favorevole possibile per fissare i prezzi dei passaggi fra due situazioni non nulle S e S', senza dar luogo ad incongruenze, si ottiene stabilendo $Q(S, S') =$ minimo tra $P(S') - P(S)$ ed $R(S') - - R(S)$, ossia, più sinteticamente,

$$Q(S,S') = M(S') - M(S) + \frac{1}{2} |\Delta(S') - \Delta(S)|$$

ove si ponga

$$M(X) = \frac{1}{2} \{P(X) + R(X)\} \, , \quad \Delta(X) = P(X) - R(X) .$$

È questo l'annunciato «criterio II», e per la dimostrazione della sua proprietà di *optimum* rimando al luogo citato.

Supponiamo inoltre sussistano le due condizioni seguenti:

[1] $$Q(S, S') \leq P(S' - S) = R(S - S')$$

(secondo la quale si ammette che quando l'acquisto di $S' - S$, rispettivamente il riscatto di $S - S'$, vengano realizzati in una situazione precedente non nulla, si possa avere, se mai, qualche facilitazione, ma non un aggravio delle condizioni);

[2] $$P(\lambda S) = \lambda \cdot P(S)$$

per ogni $\lambda \geq 0$ (proporzionalità dei prezzi per un cambiamento proporzionale, senza inversione di segno, di tutti gli importi). Dalla

[2] Il criterio I era il più sfavorevole possibile, dato da $Q(S, S') = P(S) - - R(S')$; il III quello «vettoriale»: $Q(S, S') = P(S' - S)$.

seconda condizione, per la prima, scende che è anche, analogamente, $R(\lambda S) = \lambda \cdot R(S)$ $(\lambda \geqq 0)$.

Il risultato fondamentale che sussiste sotto le dette ipotesi, e che mi limito a trascrivere [3], è il seguente: *perchè non si abbiano incongruenze è necessario e sufficiente che il prezzo P sia una funzione concava,* si abbia cioè, per S, S' qualunque,

$$P\left\{\frac{1}{2}(S+S')\right\} \leq \frac{1}{2}\left\{P(S)+P(S')\right\}.$$

Una tale funzione concava si può ottenere scegliendo comunque n prezzi *lineari omogenei* $P_1, P_2, \cdots, P_n$, tali cioè che

$$P_i(X+Y) = P_i(X) + P_i(Y)\ ,\quad P_i(\lambda X) = \lambda P(X),$$

e definendo $P(X)$ come il massimo fra i valori $P_1(X), P_2(X), \cdots, P_n(X)$; il minimo di tali valori dà allora $R(X)$. La più generale funzione $P(X)$ concava si può sempre ottenere col procedimento precedente, purchè si considerino in genere il massimo e il minimo (più esattamente, il limite superiore e inferiore) tra infinite funzioni lineari omogenee anzichè tra un numero finito $P_1, P_2, \cdots, P_n$ come detto sopra.

Studieremo un po' più da vicino i due casi più semplici: quello in cui P è lineare (caso di un'unica funzione lineare), e quello in cui P ed R sono rispettivamente dati dal più alto e più basso dei valori di due funzioni lineari φ e ψ. Nel primo caso si ha un sistema *conservativo*, ciò che corrisponde all'impostazione usuale della matematica finanziaria; *conservativo* diremo un sistema di situazioni in cui, per qualunque insieme di passaggi che riporti al punto di partenza, la spesa sia nulla, e la condizione per la conservatività è che ogni passaggio sia *reversibile* (ossia che $Q(S, S') + Q(S', S) = 0$), od anche, semplicemente (se il sistema contiene la situazione nulla O), che il prezzo e il riscatto coincidano sempre. Un passaggio non reversibile ($Q(S,S') + Q(S, S') > 0$) si dirà *dissipativo*, e *dissipativo* si dirà un sistema non conservativo, ossia contenente almeno un passaggio dissipativo, ossia ancora (se esso contiene O) contenente almeno una situazione a prezzo e riscatto disuguali. Si osservi che, in generale, un sistema dissipativo conterrà dei sistemi parziali conservativi. Il sistema conservativo contenente O è dato in ogni caso dall'equazione $\Delta(X) = P(X) - R(X) = 0$; per ogni altro sistema conservativo sussiste la

3) Cfr. loc. cit. [1]), pag. 112.

relazione $\Delta(X) = \text{cost.} > 0$, ed anzi, sotto le condizioni restrittive in cui ci siamo posti (criterio II), per ogni $c > 0$ l'equazione $\Delta(X) = c$ rappresenta un sistema conservativo. Dalla formula fondamentale del criterio II scende infatti

$$Q(S, S') + Q(S', S) = |\Delta(S') - \Delta(S)|$$

e quindi

$$Q(S, S') + Q(S', S) = 0$$

se e soltanto se $\Delta(S') = \Delta(S)$, ossia, dicendo Δ *dissipazione* di una situazione, se S ed S' hanno uguale dissipazione. Possiamo perciò enunciare: nel caso del criterio II, i sistemi conservativi sono le varietà di livello della dissipazione; la circostanza intrinseca che può ora meglio giustificare l'interesse speciale del caso di una funzione concava determinata da due sole funzioni lineari, più che non il fatto stesso meramente estrinseco che tali funzioni siano due soltanto, sta nel fatto che allora, e soltanto allora, i sistemi conservativi sono dati da un fascio di spazi lineari paralleli, mentre in ogni altro caso sono curvi o angolosi. Precisamente, nel caso di due funzioni lineari φ e ψ, $\varphi - \psi$ è lineare, ed è $\Delta = |\varphi - \psi| = c$ su i due piani paralleli equidistanti dall'origine $\varphi - \psi = \pm c$, che, riuniti, costituiscono il sistema conservativo $\Delta = c$.

4. Il caso conservativo è molto semplice. Se il prezzo deve essere una funzione lineare omogenea delle situazioni finanziarie X, esso è infatti completamente individuato assegnando comunque il prezzo della somma unitaria pagabile in un istante futuro qualsiasi, e cioè assegnando semplicemente la funzione reale $\varphi(\tau) = P(1^{(\tau)}) =$ prezzo della somma « 1 » pagabile all'istante τ. Abbiamo infatti allora

$$P(S) = P(S_1^{(t_1)} + S_2^{(t_2)} + \cdots + S_n^{(t_n)}) = S_1\varphi(t_1) + S_2\varphi(t_2) + \cdots + S_n\varphi(t_n),$$

od anche, mediante un integrale di Stieltjes,

$$P(S) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\, dS(\tau)\,.$$

Quest'ultima espressione conserva evidentemente la sua validità anche volendo considerare dei casi continui.

Per i due postulati posti fin da principio, la funzione reale $\varphi(\tau)$ non può essere del tutto arbitraria, ma deve essere positiva e decrescente, partendo dal valore iniziale $\varphi(0) = 1$. Come esempio particolarmente significativo possiamo considerare il caso dell'interesse composto a saggio costante, in cui

$$\varphi(\tau) = e^{-\delta\tau}, \quad P(S) = \int_0^\infty e^{-\delta\tau} dS(\tau).$$

Nel caso generale di P concavo avremo analogamente n (o, in generale, infinite; ma possiamo riferirci, per fissare le idee, al caso di n finito) funzioni reali $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \cdots, \varphi_n(\tau)$ e, posto

$$P_i(S) = \int_0^\infty \varphi_i(\tau)\, dS(\tau),$$

sarà

$$P(S) = \max_i P_i(S) \quad , \quad R(S) = \min_i P_i(S).$$

È importante osservare che anche per ciascuna delle funzioni φ_i debbon valere le due condizioni predette, di essere cioè positive e decrescenti. Supponiamo infatti che per un certo $\tau = \tau_1$ una delle φ, sia φ_h, risulti negativa: $\varphi_h(\tau_1) < 0$; è positivo allora il prezzo fittizio P_h di una somma negativa in τ_1, ma non solo P_h, prezzo fittizio, presenta questa infrazione al postulato dei segni, bensì anche P che, essendo il massimo dei P_i, e quindi maggiore o uguale a P_h, risulta positivo:

$$P[(-1)^{(\tau_1)}] \geq P_h[(-1)^{(\tau_1)}] = -\varphi_h(\tau_1) > 0.$$

Analogamente, se φ_h non è decrescente (ad esempio $\varphi_h(\tau_2) > \varphi_h(\tau_1)$, con $\tau_2 > \tau_1$), P_h non soddisfa al postulato del rendimento del denaro, e di conseguenza nemmeno P, essendo per le stesse ragioni

$$P[(-1)^{(\tau_1)} + 1^{(\tau_2)}] \geq P_h[(-1)^{(\tau_1)} + 1^{(\tau_2)}] = \varphi_h(\tau_2) - \varphi_h(\tau_1) > 0.$$

Rimane così precisata la natura delle funzioni lineari che *inviluppano* la funzione concava P: *se P deve soddisfare ai due predetti postulati (dei segni e del rendimento del denaro), è necessario (e ovviamente anche sufficiente) che i medesimi postulati siano soddisfatti da tutte le funzioni lineari inviluppanti.*

Nel caso di $n = 2$, sul quale, come annunciato, vogliamo soffermarci più diffusamente, si potranno prendere ad arbitrio due funzioni φ e ψ (come scriveremo anzichè φ_1 e φ_2) positive e decrescenti partendo dal valore iniziale $\varphi(0) = \psi(0) = 1$. Anzichè P_1 e P_2, diremo H e K i due prezzi fittizi corrispondenti a φ e ψ:

$$H(S) = \int_0^\infty \varphi(\tau) dS(\tau) \ , \ K(S) = \int_0^\infty \psi(\tau) dS(\tau)$$

$H(S)$ e $K(S)$ hanno sempre un significato pratico per ogni S, in quanto, se $H(S) > K(S)$ è $H(S) = P(S)$, $K(S) = R(S)$, se invece $H(S) < K(S)$ è $K(S) = P(S)$, $H(S) = R(S)$.

Naturalmente è $H(S) = K(S) = P(S) = R(S)$ sul *piano* $H = K$ di cui l'equazione esplicita mediante φ e ψ può esprimersi

$$\int_0^\infty \delta(\tau) dS(\tau) = 0$$

con $\delta(\tau) = \varphi(\tau) - \psi(\tau)$, piano che, come sappiamo, altro non è se non il sistema conservativo contenente la situazione nulla. Tale piano divide le situazioni in due grandi semispazi: quello in cui $H > K$, dove

$$P(S) = \int_0^\infty \varphi(\tau) dS(\tau)$$

e quello in cui $H < K$, dove

$$P(S) = \int_0^\infty \psi(\tau) dS(\tau);$$

in ciascuno dei due semispazi i prezzi sono *additivi*. Il caso praticamente più plausibile e più interessante è quello in cui questi due semispazi contengono rispettivamente tutte le situazioni positive e negative, dicendo situazioni *positive* quelle in cui tutte le somme sono positive ($S(\tau)$ mai decrescente), *negative* quelle in cui tutte le situazioni sono negative ($S(\tau)$ mai crescente); tale caso è caratterizzato dalla condizione che $\delta(\tau)$ non cambi mai di segno, e sia cioè o sempre $\varphi \geqq \psi$ o sempre $\varphi \leqq \psi$ (senza perdere in generalità supporremo $\varphi \geqq \psi$ e quindi $\delta \geqq 0$). Se infatti $\varphi \geqq \psi$, e $dS(\tau) \geqq 0$, si ha $\int \varphi dS \geqq \int \psi dS$, e la condizione è quindi sufficiente; se invece in due punti τ_1 e τ_2 si ha $\varphi(\tau_1) > \psi(\tau_1)$, $\varphi(\tau_2) < \psi(\tau_2)$, già $1^{(\tau_1)}$ e $1^{(\tau_2)}$ non appartengono, evidentemente, al medesimo semispazio, e la condizione risulta necessaria.

Per determinare completamente il sistema dei prezzi $Q(S, S')$ non rimane che dare l'espressione esplicita, di cui abbiamo ormai tutti gli elementi, di $M(S)$ e $\Delta(S)$ della formula fondamentale del criterio II. Basta a tal uopo introdurre ancora

$$\mu(\tau) = \frac{1}{2}\{\varphi(\tau) + \psi(\tau)\}$$

con che risulta

$$\varphi(\tau) = \mu(\tau) + \frac{1}{2}\delta(\tau), \quad \psi(\tau) = \mu(\tau) - \frac{1}{2}\delta(\tau),$$

$$M(S) = \frac{1}{2}\{P(S) + R(S)\} = \int_0^\infty \mu(\tau) dS(\tau),$$

$$\Delta(S) = P(S) - R(S) = \left|\int_0^\infty \delta(\tau) dS(\tau)\right|$$

$$P(S) = \int_0^\infty \mu(\tau) dS(\tau) + \frac{1}{2}\left|\int_0^\infty \delta(\tau) dS(\tau)\right|,$$

$$R(S) = \int_0^\infty \mu(\tau) dS(\tau) - \frac{1}{2}\left|\int_0^\infty \delta(\tau) dS(\tau)\right|.$$

Dopo ciò la formula

$$Q(S,S') = M(S') - M(S) + \frac{1}{2}|\Delta(S') - \Delta(S)|,$$

così si esprime

$$Q(S,S') = \int_0^\infty \mu(\tau)\, d\,\{S'(\tau) - S(\tau)\} +$$

[a] $$+ \frac{1}{2} \left\| \int_0^\infty \delta(\tau)\, dS'(\tau) \right| - \left| \int_0^\infty \delta(\tau)\, dS(\tau) \right\| =$$

$$= \int_0^\infty \mu(\tau) d\{S'(\tau) - S(\tau)\} + \frac{1}{2} \left| \int_0^\infty \delta(\tau) d\{S'(\tau) - S(\tau)\} \right| = P(S' - S)$$

se $\int \delta dS'$ e $\int \delta dS$ hanno il medesimo segno (se S ed S' appartengono al medesimo semispazio), oppure

[b] $$P(S' - S) - \left| \int_0^\infty \delta(\tau) d\bar{S}(\tau) \right| < P(S - S')$$

(ove $\bar{S}$ è quello fra S e S' per cui $\int_0^\infty \delta(\tau) d\bar{S}(\tau)$ è minore) nel caso

opposto, in cui i due integrali hanno segni contrari, e cioè S ed S' appartengono a semispazi diversi.

Per fare un esempio particolarmente semplice, poniamo $\varphi(\tau) = v^\tau$, $\psi(\tau) = w^\tau$, $(w < v)$: ciò significa nient'altro che applicare due diversi saggi di sconto (ossia, se si preferisce, due diversi saggi d'interesse $v^{-1} - 1$ e $w^{-1} - 1$) rispettivamente per operazioni attive e passive, come vuole l'uso corrente nella pratica. Un'operazione positiva è calcolata tutta sulla base del saggio di sconto più alto (dell'interesse più basso), un'operazione negativa sulla base del saggio di sconto più basso (dell'interesse più alto). Ma nel caso di un'operazione composta di parti d'entrambi i segni, cosa sarebbe da fare ? E nel caso di un'operazione che consista nella trasformazione di una situazione acquisita in un'altra ?

Potrebbe pensarsi a prima vista che si dovrebbe scomporre l'operazione nelle due parti comprendenti rispettivamente le somme positive e negative, e sommare insieme i prezzi delle due parti, calcolati su basi eterogenee (e cioè l'uno con l'uno e l'altro con l'altro dei due saggi di sconto). Risulta da quanto sopra che la severità di tale criterio sarebbe eccessiva [4]: basterebbe, per rimanere coerenti col modo di trattare le operazioni positive e negative, applicare a tutto il complesso dell'operazione la base più severa, ossia, in altre parole, applicare il saggio delle operazioni positive o negative a seconda che l'operazione appartiene al semispazio contenente le operazioni positive o a quello contenente le operazioni negative. Si potrebbe dire, « a seconda che l'operazione sia prevalentemente positiva o prevalentemente negativa » purchè si tenesse presente che tali concetti non hanno un valore assoluto, ma dipendono dalla scelta di v e w (o, più in generale, di φ e ψ).

Quanto al caso di trasformazioni da S a S', se S ed S' sono entrambe prevalentemente positive o prevalentemente negative si deve pagare il prezzo della differenza $S' - S$ come se nessuna relazione vi fosse tra l'operazione nuova e quelle precorse; si ha invece una agevolazione – nella misura della minore fra le due dissipazioni di S e S' – quando l'una di esse sia prevalentemente positiva e l'altra prevalentemente negativa.

Se non fosse $\varphi \geqq \psi$ per ogni τ, come finora abbiamo supposto, si avrebbe un caso più generale ma meno interessante, nel quale sarebbe ancora

$$M(S) = \int_0^\infty \mu(\tau)\, dS(\tau),$$

ma l'espressione della dissipazione dovrebbe scriversi sostituendo $|\delta(\tau)|$ in luogo di $\delta(\tau)$:

$$\Delta(S) = \left| \int_0^\infty |\delta(\tau)|\, dS(\tau) \right| \cdot$$

[4] La stessa osservazione si può fare nel campo delle assicurazioni, ed è particolarmente importante perchè si tratterebbe ivi di correggere un uso generale, in qualche paese codificato addirittura per legge. Se sono in uso due basi tecniche diverse, ad esempio una per assicurazioni in caso di morte e l'altra per assicurazioni in caso di vita, per un'assicurazione composta non è giusto chiedere la somma dei due premi calcolati su basi eterogenee, ma il premio complessivo calcolato sulla base *nel complesso* più severa. Criterio questo *meno severo* dell'altro che non ha giustificazione. Non possiamo infatti per un medesimo individuo temere un'antiselezione tanto per la componente morte che per la componente vita (non può infatti avere probabilità di morte contemporaneamente maggiore e minore di quella normale); al più possiamo temere la selezione in quello dei due sensi che *nell'insieme* è più dannoso, e regolarci di conseguenza secondo il criterio esposto.

Le considerazioni sopra svolte varrebbero inalterate, salvo che i semispazi non conterrebbero l'uno le operazioni positive e l'altro le negative, e cadrebbe ogni significato della denominazione di «prevalentemente positivo» e «prevalentemente negativo».

5. Molti altri argomenti si presenterebbero spontanei per proseguire lo studio delle operazioni finanziarie secondo questo punto di vista che consiste nel basarsi sistematicamente su concetti generali e sul principio di evitare incongruenze anzichè sul metodo ordinario di accettare senza discussione e senza analisi come fondamento della trattazione i concetti di «interesse» e simili, quali e sol perchè sono applicati nell'uso corrente. Tale punto di vista si potrebbe ravvicinare a quello già molto generale in cui s'è posto il Cantelli considerando «leggi di capitalizzazione» definite da condizioni molto larghe; l'ulteriore allargamento del punto di vista consiste nel considerare, come qui facciamo, l'insieme di tutte le operazioni (ad esempio positive e negative) da un punto di vista unitario, anzichè separatamente studiare la legge speciale di ciascun tipo di operazioni, trascurando o lasciando a una fase successiva la ricerca di eventuali contraddizioni fra operazioni basate su diverse leggi [5].

Sarebbero anzitutto da estendere le considerazioni qui svolte relativamente a un unico istante $t = 0$ al caso in cui si considerino contemporaneamente tutti i diversi t. Si potrebbero allora chiarire anche secondo il punto di vista seguito le questioni sulla scindibilità o non scindibilità delle leggi di capitalzzazione poste e risolute in noti lavori del Cantelli [6]. Nel caso della «non scindibilità» si presenterebbe poi un singolare problema di massimo che non mi sembra di troppo facile soluzione, e sarebbe da analizzare lo sviluppo di un'operazione nel tempo dal punto di vista *dinamico*, in relazione al concetto di *riserva*, ciò che diverrebbe molto meno semplice che nel caso ordinario. Rimarrebbe infine a passare ai casi più interessanti di operazioni non rigide e aleatorie, e in particolare alle assicurazioni.

Ma ciò potrà eventualmente formare l'oggetto di un ulteriore lavoro.

---

[5] Una generalizzazione intermedia, di cui si potrà valutare più diffusamente la portata nel prossimo lavoro in cui potranno essere sviluppati i punti che qui mi limito ad accennare, è quella del BONFERRONI in «Atti del X Congresso Internazionale degli Attuari», vol. 5°, pag. 340-359: *Sull'equivalenza finanziaria.*

[6] F. P. CANTELLI, *Genesi e costruzione delle tavole di mutualità*, «Bollettino di notizie sul Credito e sulla Previdenza», Roma, 1914.