CARATTERISTICA DI UN'OMOGRAFIA VETTORIALE.

In: « *Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei* », Roma 1929, pp. 387-395.

Caratteristica di un'omografia vettoriale

Nota di **BRUNO de FINETTI**, presentata dal S. O. **GIOVANNI GIORGI**

Sommario. — Se l'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$ ha una radice d'ordine c per $x = 0$ ($c = 0$ se $I_n \alpha \neq 0$), il numero c si dirà per definizione *caratteristica* dell'omografia vettoriale α. La caratteristica è in relazione colla struttura degli spazi di radici di α e delle sue potenze; tale studio permette di determinare completamente il significato delle radici multiple, reali e complesse, dell'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$.

1. Come è noto, la ricerca delle direzioni unite di un'omografia vettoriale α, in uno spazio a n dimensioni, dipende dalla considerazione dell'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$; se x ne è una radice reale, esiste almeno un vettore $\boldsymbol{u}$ tale che $\alpha\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{u}$. Se x è una radice reale multipla d'ordine c ($c \leq n$), potrebbe sembrare a prima vista che dovessero esistere c vettori linearmente indipendenti per cui $\alpha\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{u}$. Tale proprietà, in generale, non sussiste; vale però in molti casi, e in particolare per le dilatazioni (1).

Per studiare il caso generale, dovremo introdurre il concetto di *caratteristica di un'omografia:* diremo che α ha la caratteristica c se $I_n(\alpha - x)$ ha una radice d'ordine c per $x = 0$. Avremo allora che se x è radice d'ordine c di $I_n(\alpha - x) = 0$, l'omografia $(\alpha - x)$ ha caratteristica c. Studiando le proprietà caratteristiche di una tale omografia, potremo riconoscere completamente il significato delle radici multiple reali. L'estensione al caso delle radici multiple complesse è poi immediato, tenendo presente il significato delle radici complesse trovato dal BURGATTI (2).

Ciò premesso per chiarire lo scopo principale della ricerca, ci occuperemo soltanto di studiare le omografie in relazione alla loro caratteristica, lasciando

(1) Per un caso particolare vedasi: MANARINI, « *Sulle direzioni unite delle dilatazioni in un S_n euclideo* », Boll. U. M. I., A. VII, N. 2, Aprile 1928.

(2) BURGATTI, « *Sulle equazioni algebriche a matrice* », Boll. U. M. I., A. VII, N. 2, Aprile 1928.

per altro lavoro l'applicazione accennata. Aggiungeremo soltanto, come esempio particolarmente facile e importante, la dimostrazione dell'esistenza di n direzioni unite indipendenti per ogui dilatazione.

2. Sia S_n un sistema lineare a n dimensioni; lo diremo spazio a n dimensioni, e ogni suo elemento si dirà vettore di S_n. Non avremo bisogno però, in generale, di considerare le operazioni metriche (ad es.: prodotto scalare e vettoriale di vettori) e i concetti che ne dipendono (ad es.: coniugata di un'omografia, dilatazione, omografia assiale, isomeria, ortogonalità di vettori). Prescindere, fin dove si può, dalle nozioni metriche, è assai consigliabile (1): si guadagna in generalità, in semplicità, in eleganza.

Anche indipendentemente dai concetti metrici è definito — a meno dell'unità di misura — il volume (con segno) di n vettori. Sia infatti

$$V(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

un numero reale funzione lineare alternata di $\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \ldots \boldsymbol{x}_n$ (non identicamente nulla). È noto che ogni altra funzione lineare alternata di $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ è il prodotto di $V(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ per una costante. Ed è $V(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = 0$ se e solo se le $\boldsymbol{x}$ sono linearmente indipendenti, cioè se esistono dei coefficenti c_i non tutti nulli tali che

$$c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_n \boldsymbol{x}_n = 0 .$$

Supponendo fissata una volta per sempre l'unità di misura, si possono introdurre gli invarianti $I_h \alpha (h = 1, 2, \ldots, n)$ di un'omografia α fra vettori di S_n (2), ponendo nel modo solito

$$I_n \alpha . V(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = V(\alpha \boldsymbol{x}_1, \alpha \boldsymbol{x}_2, \ldots, \alpha \boldsymbol{x}_n)$$

(quali si siano i vettori $\boldsymbol{x}_i$) e definendo successivamente $I_h \alpha (h = 1, 2, \ldots, n-1)$ mediante lo sviluppo

$$I_n(\alpha + x) = I_n \alpha + x . I_{n-1} \alpha + x^2 . I_{n-2} \alpha + \ldots + x^{n-1} . I_1 \alpha + x^n .$$

(1) Come ho fatto rilevare anche in «*Sulle operazioni dell'analisi vettoriale che non dipendono dalle nozioni metriche*», Atti Pontificia Acc. d. Scienze - Nuovi Lincei, Aprile 1929.

(2) Che risultano però dei puri numeri, indipendenti dalla scelta dell'unità di misura, ossia di un particolare operatore V.

Si può ricavare senza difficoltà l'espressione esplicità di $I_h \alpha$, usata ordinariamente come definizione. È

$$I_1 \alpha . V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V(\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n) + V(x_1, \alpha x_2, \ldots, x_n) + \ldots \\ \ldots + V(x_1, x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

e analogamente

$$I_h \alpha . V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

è la somma di tutti i termini del tipo $V(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_h, x_{h+1}, \ldots, x_n)$, ottenuti sostituendo in tutti i modi possibili (che sono $\binom{n}{h}$) αx_i ad x_i in h posti nell'espressione $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3. Consideriamo ora la caratteristica c di α. Dire che $I_n(\alpha - x)$ ha una radice d'ordine c per $x = 0$ significa evidentemente che

$$I_n \alpha = I_{n-1} \alpha = \ldots = I_{n-c+1} \alpha = 0 , \qquad I_{n-c} \alpha \neq 0 .$$

Se $c = 0$, $I_n \alpha \neq 0$, l'omografia e *propria:* è cioè $\alpha x = 0$ soltanto se $x = 0$; inversamente se α è propria è $I_n \alpha \neq 0$. Ciò è ben noto, e si dimostra del resto facilmente.

Se $c > 0$, $I_n \alpha = 0$, α è *degenere,* cioè non propria: esiste almeno un vettore non nullo x tale che $\alpha x = 0$.

Sia a_1 un tale vettore.

Perchè sia anche $I_{n-1} \alpha = 0$ dev'essere nulla, comunque si scelgano $x_2 \ldots x_n$, la somma

$$V(a_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + V(\alpha a_1, x_2, \ldots, \alpha x_n) + \\ + \ldots + V(\alpha a_1, \alpha x_2, \ldots, x_n) .$$

Ma tutti i termini dopo il primo contengono $\alpha a_1 = 0$, e sono identicamente nulli; resta che deve annullarsi $V(a_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$, ossia che $a_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n$, debbono essere linearmente dipendenti.

Sia

$$c_1 a_1 + c_2 \alpha x_2 + \ldots + c_n \alpha x_n = c_1 a_1 + \alpha(c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n) = 0 ;$$

posto

$$a_2 = -(c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n) ,$$

si ha

$$\alpha a_2 = c_1 a_1 .$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè, se $I_n \alpha = 0$ e $\alpha a_1 = 0$, sia anche $I_{n-1} \alpha = 0$, è che esista un vettore a_2 tale che $\alpha a_2 = c_1 a_1$. Possiamo osservare che i casi sono due: o $c_1 = 0$, $\alpha a_2 = 0$, o $c_1 \neq 0$, e allora possiamo addirittura scegliere a_2 in modo che $\alpha a_2 = a_1$. Di ciò parleremo in seguito.

Perchè sia anche $I_{n-2} \alpha = 0$ dev'essere nulla, comunque si scelgano $x_3 \dots x_n$, la somma degli $\binom{n}{2}$ termini che si ottengono da $V(a_1, a_2, x_3, \dots, x_n)$ operando con α su $n-2$ dei vettori. Ma i termini in cui compare $\alpha a_1 = 0$ sono nulli; quelli in cui compare $\alpha a_2 = c_1 a_1$ sono nulli; rimane il solo termine

$$V(a_1, a_2, \alpha x_3, \dots, \alpha x_n) .$$

Perchè si annulli è necessario e sufficente che esista analogamente un vettore a_3 (indipendente da a_1, a_2) tale che αa_3 dipenda linearmente da a_1, a_2.

Perchè si annulli anche $I_{n-3} \alpha$ dovrà annullarsi

$$V(a_1, a_2, a_3, \alpha x_4, \dots, \alpha x_n)$$

e sarà quindi necessario e sufficente che esista a_4 (indipendente da a_1, a_2, a_3) tale che αa_4 dipenda linearmente da a_1, a_2, a_3.

E così di seguito.

Se c è la caratteristica di α, avremo quindi c vettori linearmente indipendenti $a_1 a_2 \dots a_c$ tali che

$$\begin{array}{llll}
\alpha a_1 = 0 & & & \\
\alpha a_2 & \textit{lin. dip. da} & & a_1 \\
\alpha a_3 & \text{»} & \text{»} & a_1, a_2 \\
\dots\dots & & & \\
\alpha a_c & \text{»} & \text{»} & a_1 a_2, \dots, a_{c-1},
\end{array}$$

mentre se x è linearmente indipendente da $a_1 \dots a_c$ è anche αx linearmente indipendente da $a_1 \dots a_c$.

4. Poichè αa_2 dipende linearmente da a_1, e $\alpha a_1 = 0$, è ovviamente $\alpha^2 a_2 = 0$, e per le stesse ragioni sarà $\alpha^3 a_3 = 0, \dots, \alpha^c a_c = 0$. Anzi sarà $\alpha^2 x = 0$ per ogni x linearmente dipendente da a_1, a_2; $\alpha^3 x = 0$ per ogni x

linearmente dipendente da $a_1, a_2, a_3; \ldots; \alpha^c x = 0$ per ogni x linearmente dipendente da $a_1 \ldots a_c$. Inversamente se $\alpha^c x = 0$, x dipende linearmente da $a_1 \ldots a_c$, perchè se x ne è indipendente, nè è indipendente anche αx, e quindi $\alpha^2 x, \alpha^3 x, \ldots$, e non può, in particolare, aversi $\alpha^c x = 0$. Se $m > c$, per la stessa ragione si vede facilmente che è $\alpha^m x = 0$ se e solo se $\alpha^c x = 0$; in particolare ciò vale per $m = n$, essendo $n \geq c$. Si noti però che, per $m < c$, non possiamo dire in generale che è $\alpha^m x = 0$ *soltanto* se x dipende linearmente da $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Potrebbe essere ad esempio $\alpha a_1 = \alpha a_2 = \ldots = \alpha a_c = 0$, e allora per qualunque m è $\alpha^m x = 0$ se e solo se $\alpha x = 0$.

Diremo che un'omografia α è di *rango* r (1) se esistono r vettori linearmente indipendenti che essa trasforma nel vettore nullo, ossia se r è il numero delle dimensioni del sistema lineare dei vettori x tali che $\alpha x = 0$.

Per quanto precede, e per l'ovvia osservazione che se $\alpha^m x = 0$ è a fortiori $\alpha^{m+1} x = 0$, possiamo dire che, se si considera il rango

$$r_0 = 0, \; r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

delle omografie

$$\alpha^0 = 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots$$

la succesione è crescente (2) finchè raggiunge la caratteristica di α, c, e poi si mantiene costante. In particolare il valore c è certo raggiunto da r_n, perchè $r_c = c$, e $c \leq n$. È quindi sempre $c = r_n$.

Possiamo ora procedere a una scelta di vettori più conveniente di quella ottenuta cogli $a_1 \ldots a_c$ del N. 3.

Sia k il minimo intero per cui α^k è di rango c $(r_k = c, r_{k-1} < c)$; i vettori per cui $\alpha^k x = 0$ costituiscono un sistema lineare a $r_k = c$ dimensioni; quelli per cui $\alpha^{k-1} x = 0$ un sistema lineare a r_{k-1} dimensioni. Potremo scegliere dunque $t_k = r_k - r_{k-1}$ vettori linearmente indipendenti $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_{t_k}^{(k)}$, tali che per ogni x da essi linearmente indipendente sia $\alpha^k x = 0$, $\alpha^{k-1} x \neq 0$ (se $x \neq 0$).

(1) Il *rango* si trova definito (limitatamente alle omografie assiali) in: Burgatti, « *Proprietà delle omografie assiali, ecc.* », Rend. R. Acc. Naz. Lincei, vol. VII, S. 6ª, 1° sem., fasc. 10, Maggio 1928.

(2) Che sia crescente e non solo non decrescente è ovvio, ma comunque risulterà anche dal seguito.

Se $\alpha^k \boldsymbol{x} = 0$, $\alpha^{k-1}(\alpha \boldsymbol{x}) = 0$, (1); supposto $k > 1$, i vettori

$$\alpha \boldsymbol{a}_1^{(k)}, \alpha \boldsymbol{a}_2^{(k)}, \ldots, \alpha \boldsymbol{a}_{t_k}^{(k)}$$

sono quindi tali che, essi e ogni loro combinazione lineare $\boldsymbol{x}$, soddisfano l'eqûazione $\alpha^{k-1}\boldsymbol{x} = 0$.

$$\boldsymbol{a}_1^{(k)}, \boldsymbol{a}_2^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{t_k}^{(k)}, \alpha \boldsymbol{a}_1^{(k)}, \alpha \boldsymbol{a}_2^{(k)}, \ldots, \alpha \boldsymbol{a}_{t_k}^{(k)}$$

risultano necessariamente linearmente indipendenti tra loro. Se $\boldsymbol{x}$, combinazione lineare dei primi t_k tra essi, fosse uguale ad $\boldsymbol{y}$, combinazione lineare dei t_k rimanenti, essendo $\alpha^{k-1}\boldsymbol{y} = 0$ risulterebbe $\alpha^{k-1}\boldsymbol{x} = 0$, assurdo se $\boldsymbol{x} \neq 0$. Quindi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = 0$, ma se

$$\boldsymbol{y} = \Sigma c_i \, \alpha \boldsymbol{a}_i^{(k)} = \alpha(\Sigma c_i \, \boldsymbol{a}_i^{(k)}) = 0,$$

e $k > 1$, a fortiori

$$\alpha^{k-1}(\Sigma c_i \, \boldsymbol{a}_i^{(k)}) = 0\,, \quad \Sigma c_i \, \boldsymbol{a}_i^{(k)} = 0\,, \quad c_i = 0 \, (i = 1, 2, \ldots, t_k)\;.$$

Se $\boldsymbol{y}$ dipende linearmente da $\alpha \boldsymbol{a}_1^{(k)} \ldots \alpha \boldsymbol{a}_{t_k}^{(k)}$, $\boldsymbol{y} = \Sigma c_i \, \alpha \boldsymbol{a}_i^{(k)}$, non può poi essere $\alpha^{k-2}\boldsymbol{y} = 0$ a meno che $\boldsymbol{y} = 0$; da $\alpha^{k-2}(\Sigma c_i \, \alpha \boldsymbol{a}_i^{(k)}) = \alpha^{k-1}(\Sigma c_i \, \boldsymbol{a}_i^{(k)}) = 0$ si ha infatti $\Sigma c_i \, \boldsymbol{a}_i^{(k)} = 0$, $\boldsymbol{y} = \alpha \Sigma c_i \, \boldsymbol{a}_i^{(k)} = 0$.

Abbiamo dunque ottenuto così t_k vettori linearmente indipendenti per ciascuno dei quali e per ogni loro combinazione lineare è

$$\alpha^{k-1}\boldsymbol{x} = 0\,, \qquad \alpha^{k-2}\boldsymbol{x} \neq 0 \qquad (\boldsymbol{x} \neq 0)\;.$$

In tutto, i vettori linearmente indipendenti che si possono scegliere sotto queste condizioni sono $r_{k-1} - r_{k-2}$, da cui $r_{k-1} - r_{k-2} \geq t_k$. Pongasi $r_{k-1} - r_{k-2} = t_k + t_{k-1}$, e scegliamo altri t_{k-1} vettori $\boldsymbol{a}_1^{(k-1)}, \boldsymbol{a}_2^{(k-1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{t_{k-1}}^{(k-1)}$, che costituiscano, insieme ai precedenti, un sistema di vettori linearmente indipendenti, e siano tali che per ogni loro combinazione lineare $\boldsymbol{x}$ sia

$$\alpha^{k-1}\boldsymbol{x} = 0\,, \qquad \alpha^{k-2}\boldsymbol{x} \neq 0 \qquad (\boldsymbol{x} \neq 0)\;.$$

(1) Si potrà confrontare utilmente: Pincherle e Amaldi, « *Operazioni distributive* », Cap. III.

Operando con α sui $t_k + t_{k-1}$ vettori

$$\alpha \boldsymbol{a}_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, t_k), \qquad \boldsymbol{a}_i^{(k-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, t_{k-1})$$

avremo altrettanti vettori

$$\alpha^2 \boldsymbol{a}_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, t_k), \qquad \alpha \boldsymbol{a}_i^{(k-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, t_{k-1})$$

tali che per essi e ogni loro combinazione lineare $\boldsymbol{x}$ è $\alpha^{k-2}\boldsymbol{x} = 0$, mentre per il solito motivo $\alpha^{k-3}\boldsymbol{x} \neq 0$ $(\boldsymbol{x} \neq 0)$.

Se $k = 2$ tali vettori sono tutti nulli; supposto $k > 2$, anche ora gli

$$\boldsymbol{a}_i^{(k)}; \ \alpha \boldsymbol{a}_i^{(k)}, \ \boldsymbol{a}_i^{(k-1)}; \ \alpha^2 \boldsymbol{a}_i^{(k)}, \ \alpha \boldsymbol{a}_i^{(k-1)},$$

sono linearmente indipendenti. Pensare infatti che siano uguali due combinazioni lineari, $\boldsymbol{x}$ di vettori dei primi tre tipi, $\boldsymbol{y}$ di vettori dei due ultimi, è assurdo, se $\boldsymbol{x} \neq 0$, perchè $\alpha^{k-2}\boldsymbol{x} \neq 0$, $\alpha^{k-2}\boldsymbol{y} = 0$. E se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = 0$, $\boldsymbol{y}$ non può essere che una combinazione lineare a coefficenti tutti nulli.

Poniamo ora $r_{k-2} - r_{k-3} = t_k + t_{k-1} + t_{k-2}$ (risulterà $t_{k-2} \geq 0$); potremo analogamente scegliere t_{k-2} vettori $\boldsymbol{a}_1^{(k-2)}, \boldsymbol{a}_2^{(k-2)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{t_{k-2}}^{(k-2)}$ colle solite condizioni, e godranno delle solite proprietà.

In generale, posto

$$t_h = 2r_h - (r_{h-1} + r_{h+1}) \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

si avrà $t_h = 0$ se $h > k$, cioè se $r_{h-1} = c$, $t_h > 0$ per $h = k$, $t_h \geq 0$ se $h < k$, e risulterà $c = t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \ldots + kt_k$.

Si osservi come le r si esprimano mediante le t:

$$r_h = t_1 + 2t_2 + \ldots + ht_h + h(t_{h+1} + t_{h+2} + \ldots) \ .$$

E si potranno scegliere successivamente procedendo nel modo indicato:

t_k	vettori	$\boldsymbol{a}_i^{(k)}$	$(i = 1, 2, \ldots, t_k)$
t_{k-1}	vettori	$\boldsymbol{a}_i^{(k-1)}$	$(i = 1, 2, \ldots, t_{k-1})$
t_{k-2}	vettori	$\boldsymbol{a}_i^{(k-2)}$	$(i = 1, 2, \ldots, t_{k-2})$
. . . .			
t_1	vettori	$\boldsymbol{a}_i^{(1)}$	$(i = 1, 2, \ldots, t_1)$

in modo che per $\boldsymbol{x}$ linearmente dipendente dagli $\boldsymbol{a}_i^{(k)}$ sia

$$\alpha^k \boldsymbol{x} = 0, \qquad \alpha^{k-1} \boldsymbol{x} \neq 0 \qquad (\boldsymbol{x} \neq 0) ,$$

per $\boldsymbol{x}$ linearmente dipendente dagli $\alpha \boldsymbol{a}_i^{(k)}$ e $\boldsymbol{a}_i^{(k-1)}$ sia

$$\alpha^{k-1} \boldsymbol{x} = 0, \qquad \alpha^{k-2} \boldsymbol{x} \neq 0 \qquad (\boldsymbol{x} \neq 0) ,$$

. . . .

per $\boldsymbol{x}$ linearmente dipendente dagli $\alpha^m \boldsymbol{a}_i^{(k)}, \alpha^{m-1} \boldsymbol{a}_i^{(k-1)}, \alpha^{m-2} \boldsymbol{a}_i^{(k-2)}, \ldots, \alpha \boldsymbol{a}_i^{(k-m+1)}$, $\boldsymbol{a}_i^{(k-m)}$ $(m < k-1)$ sia

$$\alpha^{k-m} \boldsymbol{x} = 0, \qquad \alpha^{k-m-1} \boldsymbol{x} \neq 0 \qquad (\boldsymbol{x} \neq 0) ,$$

. . . .

per $\boldsymbol{x}$ linearmente dipendente dagli $\alpha^{k-1} \boldsymbol{a}_i^{(k)}, \alpha^{k-2} \boldsymbol{a}_i^{(k-1)}, \ldots, \alpha \boldsymbol{a}_i^{(2)}, \boldsymbol{a}_i^{(1)}$ sia

$$\alpha \boldsymbol{x} = 0 ,$$

e i c vettori considerati siano linearmente indipendenti.

5. Per meglio chiarire il procedimento seguito e per dare all'enunciato forma mnemonicamente facile, converrà definire *direzione primitiva d'ordine h* per un'omografia α quella del vettore $\boldsymbol{x} (\boldsymbol{x} \neq 0)$ se

1) $\alpha^h \ \boldsymbol{x} = 0$
2) $\alpha^{h-1} \boldsymbol{x} \neq 0$
3) non esiste un vettore $\boldsymbol{y}$ tale che $\alpha \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$.

Le direzioni in parola sono cioè quelle che appartengono allo spazio di radici di α^h, ma non appartengono nè allo spazio di radici dt α^{h-1}, nè al trasformato mediante α dello spazio di radici di α^{h+1} (spazi che sono entrambi compresi nel primo). Nella terminologia di Pincherle e Amaldi (1), le direzioni primitive di ordine h sono le radici primitive di α^h, che non sono subordinate da radici primitive di α^{h+1}.

(1) L. c.

E potremo dire allora: *se la caratteristica di un'omografia* α *è*

$$c = t_1 + 2t_2 + \ldots + kt_k ,$$

si possono sempre scegliere t_1 *direzioni primitive semplici,* t_2 *direzioni primitive doppie,...,* t_k *direzioni primitive d'ordine* k, *linearmente indipendenti in modo completo rispetto ad* α, intendendo con questa locuzione di asserire che sono linearmente indipendenti le direzioni stesse nonchè le loro trasformate non nulle per α e le sue potenze (che, nel caso nostro, sono complessivamente in numero di c).

La caratteristica c *di* α *è il numero delle sue direzioni primitive completamente indipendenti, contando ciascuna tante volte quant'è il suo ordine.*

6. Se le sue direzioni primitive sono tutte semplici, l'omografia α è di rango uguale alla sua caratteristica, cioè ha uno spazio di radici a c dimensioni. Consideriamo, per fare l'annunciata applicazione [1], il caso di una dilatazione α, di caratteristica c. Supponendo

$$\alpha^2 \boldsymbol{x} = 0$$

si deduce

$$\alpha^2 \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = 0 , \qquad \alpha\boldsymbol{x} \times \alpha\boldsymbol{x} = 0 \qquad \alpha\boldsymbol{x} = 0 .$$

Quindi $t_2 = t_1 = c$, $k = 1$, le direzioni primitive sono tutte semplici. Per una dilatazione la caratteristica e il rango sono uguali.

E se $\boldsymbol{x}$ è radice d'ordine c di $\mathrm{I}_n(\alpha - x) = 0$, la dilatazione $\alpha - x$ ha rango c, ed esiste quindi uno spazio a c dimensioni in cui ad ogni vettore $\boldsymbol{u}$ la α fa corrispondere $\alpha\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{u}$.

Da cui l'esistenza dell'ennupla principale (di vettori uniti) anche nel caso delle radici multiple d'ordine qualunque.

[1] Nella quale usiamo, per la prima volta, i concetti metrici.