L'OPTIMUM NELLA MISURA DEL RISCATTO

(In collaborazione con S. Obry)

In: *«Atti del Secondo Congresso Nazionale di Scienza delle Assicurazioni»*, Roma,
1933, Vol. II, pp. 99-123

B. DE FINETTI e S. OBRY

L'optimum nella misura del riscatto

Estratto dagli *Atti del Secondo Congresso Nazionale di Scienza delle Assicurazioni*, Vol. II

ROMA

1933-XI

Roma, 1933-XI — Tipografia del Senato del dott. G. Bardi

L'OPTIMUM NELLA MISURA DEL RISCATTO

B. DE FINETTI E S. OBRY

SUNTO. — Rinunciando a ogni tentativo di considerare il riscatto in relazione al concetto più o meno vago di equità, ci si riduce allo studio dei due problemi seguenti: 1° esame delle condizioni necessarie e sufficienti per evitare intrinseche contraddizioni (collegando il problema a quello più generale delle trasformazioni di tariffa, in particolare delle riduzioni); 2° criteri per la scelta, fra tutte le possibilità formalmente ammissibili così determinate, di quella che meglio conduce a certi risultati che si desidera raggiungere e che costituirà quindi l' optimum relativo allo scopo prestabilito. Assumendo come scopo quello di favorire la conservazione del portafoglio – criterio questo che dovrebbe risultare alla lunga il più vantaggioso per la Compagnia – sembrerebbe conveniente che i riscatti attualmente in uso fossero resi più rapidamente crescenti, diminuendoli nei primi anni e aumentandoli in prossimità della scadenza.

1. *Generalità sull'impostazione del problema.* — I punti di vista possibili sul problema del riscatto sono sostanzialmente tre. Il primo consiste nell'escludere la facoltà di riscatto, considerando tale atto come contrario alle finalità di previdenza che l'assicurazione deve prefiggersi. Un simile indirizzo è seguito generalmente nelle assicurazioni a carattere obbligatorio; nel campo delle assicurazioni ordinarie però quella della facoltà di riscatto è oramai un'idea tanto abituale che occorrerebbe una difficile e pericolosa opera di rieducazione per estirparla. L'estremo opposto consiste nel considerare il riscatto alla stessa stregua di qualsiasi altra prestazione, ammettendo con ciò di doverlo determinare sulla base del principio di equivalenza; secondo i suoi fautori solo in tal modo, cioè portando il valore di riscatto al massimo possibile, sarebbe rispettata l'equità. Essi partono usualmente dall'ammissione che la riserva costituisca una proprietà deldell'assicurato [1], e nemmeno una proprietà sottoposta a speciali

---

[1] La riserva però e le basi per la sua determinazione, come è stato da noi rilevato al Congresso per ribattere tale concezione, non entrano nemmeno negli estremi del contratto: nei rapporti fra assicurato e compagnia non esiste di stabi-

limitazioni, come nel caso, forse più vicino al nostro, di un deposito vincolato, ma come somma di cui può in qualsiasi istante liberamente disporre (salvo qualche detrazione giustificata da ragioni di antiselezione, abbreviato impiego di capitale e sopratutto spese sostenute). Il terzo è un punto di vista intermedio: non esclude il riscatto, ma nemmeno lo considera come vera e propria prestazione, semplicemente lo tollera come un male non eliminabile e lo regola secondo criteri empirici suggeriti da ragioni d'opportunità. Nella pratica è sempre su queste basi che i riscatti sono stati stabiliti, come probabilmente lo saranno anche in futuro.

È da questo punto di vista che esamineremo il problema, il quale si presenta in tal modo nella sua massima generalità; i valori di riscatto potranno infatti supporsi stabiliti ad arbitrio e il compito che ci proponiamo si riduce all'esame delle due questioni seguenti:

a) determinare le limitazioni che si debbono imporre per evitare incongruenze;

b) studiare la maggiore o minore « opportunità » della scelta di determinate condizioni di riscatto.

Risulta senz'altro da questo modo d'impostazione che l'optimum del riscatto sarà per noi quello che rende massima tale « opportunità »; naturalmente quest'ultima non può avere che un senso relativo, in dipendenza dello scopo che si desidera raggiungere, e relativo risulta quindi anche il significato dell'optimum.

2. *Il problema della non-incongruenza.* — Carattere assoluto e puramente logico ha al contrario la prima parte, inquantochè per incongruenza intendiamo una circostanza che rende fittizia qualche parte di ciò che s'intendeva stabilito, non cioè semplicemente una cosa che appaia innaturale o cervellotica. Potrebbe sembrare che una ricerca così generale e astratta non potesse avere importanza pratica, pensando che i sistemi consacrati dall'uso dovrebbero essere senz'altro immuni da simili pecche; è ben noto invece a chi abbia avuto a trattare di casi concreti che non è raro d'imbattersi in contraddizioni; più frequenti queste si manifestano nelle trasformazioni di tariffa

---

lito se non i premi dovuti e le prestazioni promesse; il valore della riserva può essere molto diverso a parità di tali estremi a seconda delle basi tecniche adottate. Sembra quindi legittimo affermare, come facciamo, che la riserva è una voce di valore puramente interno per il bilancio di una compagnia e priva di ogni significato nei rapporti fra assicurato e assicuratore.

in seguito alla diversità dei sistemi di riscatto in uso per le varie forme di assicurazione, ma non ne mancano esempi neppure nei casi più semplici dove meno lo si potrebbe sospettare. Prendiamo ad esempio la comunissima formula di riscatto

$$R = \frac{t}{n} v^{n-t'}$$

(n rappresenta la durata del pagamento dei premi, t il numero dei premi pagati, t' il tempo trascorso all'istante del riscatto) in cui cioè la somma ridotta si determina in proporzione ai premi pagati e il riscatto scontando questa somma ridotta; se prima di riscattare l'assicurato paga un'ulteriore annualità di premio, il prezzo di riscatto aumenta di $(v^{n-t'})/n$ e tale incremento è spesso, negli ultimi anni d'assicurazione, superiore al premio π. Per $n = 20$, saggio di sconto 5 %, premi di tariffa basi H^M 4 %, i casi in cui si verifica tale incongruenza, e cioè le combinazioni di età (x) e durata trascorsa (t') per cui è conveniente il pagamento di un'ulteriore annualità di premio, risultano dal seguente prospetto [2].

t'	$\frac{1}{n} v^{n-t'}$ (per 100 di somma assicurata)	Si ha $\pi < \frac{1}{n} v^{n-t'}$ per: Mista	Si ha $\pi < \frac{1}{n} v^{n-t'}$ per: Termine fisso
15	3.92	—	—
16	4.11	—	$x \leq 39$ $(y \leq 55)$
17	4.32	$x \leq 29$ $(y \leq 46)$	$x \leq 47$ $(y \leq 64)$
18	4.54	$x \leq 38$ $(y \leq 56)$	$x \leq 52$ $(y \leq 70)$
19	4.75	$x \leq 43$ $(y \leq 62)$	$x \leq 55$ $(y \leq 74)$

Questo è un caso tipico di contraddizione il quale può lumeggiare il concetto generale di cui ci siamo preoccupati. Nel fissare le condizioni generali di polizza, l'intenzione della compagnia era evidentemente quella di non liquidare come riscatto dopo t anni una somma

[2]) **Abbiamo indicato anche l'età raggiunta $y = x + t'$ perchè risulti immediatamente per individui di quale età sussista la possibilità di sfruttare tale incongruenza.**

superiore a $(t/n)v^{n-t}$; ma le stesse condizioni di polizza dànno modo all'assicurato nei casi sopra citati, purchè sappia trar profitto delle loro incongruenze, di ricavare dalla sua polizza un importo che eccede il riscatto normale di $\left(\frac{1}{n}v^{n-t} - \pi\right)$ per ogni annualità di premio anticipata.

3. *La condizione fondamentale.* — Per esaminare in tutta la sua generalità la questione delle incongruenze, si può, ed è anzi opportuno, prescindere dalla particolare natura del contratto assicurativo per considerare un insieme qualunque di operazioni commerciali che si possano rappresentare come passaggi da uno ad un altro di certi determinati stati A, B, C, ecc. Se con $Q(A, B)$ indichiamo il prezzo del passaggio dallo stato A allo stato B (prezzo che potrà essere un importo qualunque, positivo, negativo o nullo, per $A \neq B$, mentre sarà naturalmente nullo per $A = B$), l'assenza di incongruenze si traduce nella condizione seguente:

$$[1] \qquad Q(A, B) + Q(B, C) \geqq Q(A, C).$$

Una contraddizione nel senso precedentemente spiegato si avrebbe infatti soltanto se, dopo aver stabilito per il passaggio da A a C un determinato prezzo $Q(A, C)$, si desse modo di eludere tale disposizione e ottenere lo stesso risultato a un prezzo minore passando per altri stati intermedi $B_1, B_2, \cdots, B_n$. La condizione necessaria e sufficiente è quindi:

$$Q(A, B_1) + Q(B_1, B_2) + Q(B_2, B_3) + \cdots + Q(B_{n-1}, B_n) + Q(B_n, C) \geqq Q(A, C)$$

che è equivalente alla [1], come risulta manifesto per induzione.

Vediamo, per chiarire le idee mediante un esempio pratico, come si esprima nella forma indicata l'incongruenza precedentemente rilevata: A sarà la polizza con t, delle n, annualità di premio pagate, B la stessa polizza con $t + 1$ annualità pagate, e C sarà nullo (nessuna assicurazione). Il passaggio da A a B si ottiene pagando il premio π così che $Q(A, B) = \pi$; il passaggio da A a C significa riscatto di A, così che $Q(A, C) = -(t/n)v^{n-t}$ e analogamente $Q(B, C) = -\overline{(t+1/n)}\,v^{n-t}$. La [1] significa che deve essere

$$\pi - \frac{t+1}{n}v^{n-t} \geqq -\frac{t}{n}v^{n-t}$$

ossia $\pi \geqq (1/n)\, v^{n-t}$ conformemente alle precedenti conclusioni.

4. *Sistemi conservativi e dissipativi.* — Dalla [1], insieme con la già accennata identità

[2] $$Q(A, A) = 0,$$

risulta

[3] $$Q(A, B) + Q(B, A) \geqq 0 \cdot$$

È interessante distinguere i due casi, in cui vale rispettivamente il segno di uguaglianza o il segno maggiore.

Se $Q(A, B) + Q(B, A) = 0$, il passaggio da A a B si dirà reversibile (come lo è lo scambio di un biglietto da 100 in 10 pezzi da 10 lire), mentre nel caso opposto si dirà dissipativo (come lo è in generale lo scambio di denaro con merce). La reversibilità ha carattere transitivo, nel senso che se sono reversibili i passaggi da A a B e da B a C, lo è del pari il passaggio da A a C. Risulta infatti dalla [1] che

[4] $$Q(A, C) + Q(C, A) \leqq [Q(A, B) + Q(B, A)] + [Q(B, C) + Q(C, B)];$$

nelle ipotesi poste, il secondo membro è nullo, quindi è nullo pure il primo membro, non potendo, per la [3], essere negativo. Risulta anche che nelle stesse ipotesi è

[5] $$Q(A, C) = Q(A, B) + Q(B, C);$$

infatti

$$Q(A, C) = -Q(C, A) \geqq -Q(C, B) - Q(B, A) = Q(B, C) + Q(A, B).$$

Dicendo conservativo - per ovvie analogie meccaniche (campi potenziali) - un sistema S di stati in cui, per qualunque insieme di passaggi che riporti al punto di partenza, la spesa sia nulla, scende immediatamente che condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema sia conservativo è che in esso tutti i passaggi sieno reversibili. Un corollario degno di nota è che: se S e S' sono sistemi conservativi aventi in comune almeno un elemento C, anche l'insieme $S + S'$ è conservativo; altra proprietà caratteristica dei sistemi conservativi è l'esistenza di una funzione f (analoga alla funzione potenziale e determinata a meno di una costante additiva) tale che $Q(A, B) = = f(B) - f(A)$ (fissato ad arbitrio un punto A, risulta dalla [5] che $f(X) = Q(A, X) + \text{cost.}$).

De Finetti e Obry - 3.

Un sistema non conservativo si dirà dissipativo. Esso conterrà però in generale dei sistemi conservativi; il sistema conservativo contenente un determinato stato C è quello degli stati X soddisfacenti l'equazione $D(C, X) = 0$, ove si definisca

$$D(A, B) = D(B, A) = Q(A, B) + Q(B, A) \tag{6}$$

la « dissipazione » del passaggio (A, B). A proposito delle dissipazioni così definite osserviamo che esse sono numeri non negativi che, come dimostra la [4], soddisfano la disuguaglianza triangolare.

5. *Prezzo d'acquisto e di riscatto.* — Cominciamo ora a considerare esplicitamente lo stato nullo (già presentatosi nell'esempio riportato), indichiamolo con O e introduciamo dei simboli e dei nomi speciali riferentisi ai passaggi fra lo stato nullo e uno stato A. Diremo prezzo d'acquisto, o brevemente *prezzo* di A – scrivendolo $P(A)$ — il prezzo del passaggio da O ad A; prezzo di riscatto, o brevemente *riscatto* di A — scrivendolo $R(A)$ — il prezzo, col segno cambiato, del passaggio da A a O, e *dissipazione* di A — scrivendola $\Delta(A)$ — la dissipazione del passaggio (O, A) che è uguale alla differenza fra il prezzo e il riscatto di A.

Poniamo cioè

$$P(A) = Q(O, A) \tag{7}$$

$$R(A) = -Q(A, O) \tag{8}$$

$$\Delta(A) = D(O, A) = P(A) - R(A). \tag{9}$$

Si ha naturalmente $P(O) = R(O) = 0$, mentre per A qualsiasi, come scende dalla [3], è $P(A) \geqq R(A)$. In un sistema conservativo prezzo e riscatto coincidono, e inversamente se in un sistema il prezzo e il riscatto coincidono esso risulta conservativo. In generale l'equazione del sistema conservativo che contiene lo zero, è $P(X) = R(X)$ ossia $\Delta(X) = 0$; per un tal sistema risulta

$$P(X) = R(X) = f(X) + \text{cost.}$$

ossia

$$Q(A, B) = P(B) - P(A) = R(B) - R(A).$$

Per ogni altro sistema conservativo non contenente lo zero sussiste la relazione $\Delta(X) = \text{cost.} > 0$. È infatti conseguenza immediata della disuguaglianza triangolare che la dissipazione del passaggio

(A, B) è non minore della differenza in valore assoluto fra le dissipazioni di A e di B cioè $D(A, B) \geqq |\Delta(A) - \Delta(B)|$. Per $c > 0$ non possiamo però naturalmente dire, invertendo il teorema, che un sistema in cui $\Delta(X) = c$ debba essere conservativo.

6. *Le trasformazioni in relazione ai prezzi d'acquisto e di riscatto. Criteri estremi* (*I e II*). — Vediamo ora quali siano, supposti fissati i prezzi e i riscatti, le limitazioni che ne conseguono per i prezzi dei passaggi da uno a un altro stato (nel caso delle assicurazioni: delle trasformazioni di tariffa). Come facile conseguenza della [1] si trova che sono necessarie le tre limitazioni seguenti:

[10*a*] $$Q(A, B) \leqq Q(A, O) + Q(O, B) = P(B) - R(A).$$

[10*b*] $$Q(A, B) \geqq Q(O, B) - Q(O, A) = P(B) - P(A).$$

[10*c*] $$Q(A, B) \geqq Q(A, O) - Q(B, O) = R(B) - R(A).$$

Poichè

$$[P(B) - P(A)] - [R(B) - R(A)] = \Delta(B) - \Delta(A)$$

per passaggi da uno stato meno dissipativo a uno più dissipativo vale la [10*b*], nella quale la [10*c*] rimane in questo caso assorbita, mentre al contrario vale la [10*c*] per passaggi da uno stato più dissipativo a uno meno dissipativo. Le [10*b*] e [10*c*] si possono, conglobando questi due casi, ridurre all'unica limitazione

[10*d*] $$Q(A, B) \geqq M(B) - M(A) + \frac{1}{2}|\Delta(B) - \Delta(A)|$$

ove si è posto

$$M(A) = \frac{1}{2}\{P(A) + R(A)\},$$

così che

$$P(A) = M(A) + \frac{1}{2}\Delta(A), \quad R(A) = M(A) - \frac{1}{2}\Delta(A).$$

È interessante osservare che le [10] costituiscono le limitazioni più strette possibili. Possiamo stabilire infatti di adottare sia il sistema più sfavorevole per il cliente, che chiameremo criterio I, espresso da

[11] $$Q(A, B) = \begin{cases} P(B) - R(A) & \text{per } B \neq A \\ 0 & \text{per } B = A, \end{cases}$$

sia quello più favorevole, che chiameremo criterio II, espresso da

$$[12] \qquad Q(A, B) = M(B) - M(A) + \frac{1}{2} | \Delta(B) - \Delta(A) | \,.$$

Basterà dimostrare che le posizioni relative ai criteri I e II rendono soddisfatta la [1] qualunque siano gli stati A, B, C.

Nel caso del criterio I si ha (per A, B, C distinti)

$$Q(A, B) + Q(B, C) = P(B) - R(A) + P(C) - R(B) = P(C) - \\ - R(A) + P(B) - R(B) = Q(A, C) + \Delta(B) \geqq Q(A, C),$$

e così è provato l'asserto; segue poi che $D(A, B) = \Delta(A) + \Delta(B)$, e che passando da uno a un altro stato attraverso un certo numero di stati intermedi, l'ordine in cui questi si susseguono è indifferente.

Nel caso del criterio II si ha

$$Q(A, B) + Q(B, C) = M(B) - M(A) + \frac{1}{2} | \Delta(B) - \Delta(A) | + \\ + M(C) - M(B) + \frac{1}{2} | \Delta(C) - \Delta(B) | = M(C) - M(A) + \\ + \frac{1}{2} \{ | \Delta(B) - \Delta(A) | + | \Delta(C) - \Delta(B) \} \geqq \\ \geqq M(C) - M(A) + \frac{1}{2} | \Delta(C) - \Delta(A) | = Q(A, C).$$

Risulta come caso particolare la proprietà notevole

$$D(A, B) = Q(A, B) + Q(B, A) = | \Delta(A) - \Delta(B) |,$$

ed è quindi sempre $D(A, B) = 0$ se $\Delta(A) = \Delta(B)$. L'equazione $\Delta(X) =$ cost. che è in generale, come abbiamo visto, condizione soltanto necessaria perchè un sistema sia conservativo, nel caso del criterio II risulta dunque altresì sufficiente.

7. *Significato pratico dei criteri I e II* — Vediamo che cosa significherebbe in pratica l'applicazione dei due criteri estremi citati nel campo delle assicurazioni, supponendo, per fissare le idee, che il prezzo di un'assicurazione sia uguale alla riserva matematica e il riscatto alla riserva zillmerata. Adottando il secondo criterio, cioè il criterio più favorevole possibile per l'assicurato, si dovrebbe richie-

dere per una trasformazione di tariffa o l'integrazione della riserva o, quando risulti maggiore, l'integrazione della riserva zillmerata, rispettivamente, se si ha invece un'eccedenza di riserva e un'eccedenza di riserva zillmerata, si dovrebbe rimborsare il minore di questi due importi. Secondo il criterio I, che è il più svantaggioso possibile per l'assicurato, si dovrebbe invece richiedere la differenza fra la riserva della nuova polizza e la riserva zillmerata della vecchia. È facile il confronto che mostri in quanto tale trattamento sia più gravoso dell'altro: mentre esso non contempla nessuna agevolazione per il caso di trasformazione, che viene realizzata col riscatto dell'una e l'acquisto dell'altra polizza, effettuati come operazioni distinte e a condizioni normali, l'altro criterio si può interpretare nel senso che si concede o un riscatto di favore sulla prima (in base all'intera riserva matematica), o un prezzo di favore per la seconda (in base alla riserva zillmerata), facendo però quella delle due facilitazioni che riesce meno onerosa per la compagnia.

Un carattere particolarmente notevole del criterio II sta nel fatto che esso riconduce lo studio dal campo più generale e complesso che si possa esaminare a un campo a due dimensioni, e precisamente al semipiano P, R con $P \geqq R$. Se in esso consideriamo le rette (parallele alle bisettrici degli assi P ed R)

$$\Delta = P - R = \text{cost.}\ , \quad M = \frac{1}{2}(P + R) = \text{cost.}$$

vediamo che sulle prime rette il passaggio fra due punti è reversibile, il prezzo essendo determinato dal segmento percorso preso col proprio segno, mentre sulle seconde il prezzo è misurato dal segmento percorso, preso in valore assoluto (ciò naturalmente a meno del fattore $1/\sqrt{2}$ per il passaggio dall'unità di misura degli assi P, R alla unità di misura sugli assi M, $\Delta/2$).

La proprietà di ridurre ogni problema al detto semipiano non è però esclusiva del sistema II ma è comune a tutti quei criteri per cui risulta nullo il prezzo del passaggio fra due stati che hanno uguali tanto il prezzo che il riscatto. Supponiamo infatti che i sistemi A e A', B e B' abbiano prezzi e riscatti uguali:

$$P(A) = P(A'),\ R(A) = R(A');\ P(B) = P(B'),\ R(B) = R(B');$$

si ha $Q(A', B') \leqq Q(A', A) + Q(A, B) + Q(B, B')$ ed essendo per ipotesi $Q(A, A') = Q(B, B') = 0$, $Q(A', B') \leqq Q(A, B)$; potendosi analogamente dedurre $Q(A, B) \leq Q(A', B')$, risulta che $Q(A, B) = Q(A', B')$, il che vuol dire che il prezzo della data trasformazione dipende soltanto dai prezzi e dai riscatti, ossia dai punti rappresentativi sul semipiano P, R $(\Delta \geq 0)$.

8. *Sistemi vettoriali. Criterio III.* — Finora abbiamo considerato l'insieme degli stati $A, B, C, \cdots$ senza fare nessuna ipotesi sulla sua natura e sulle proprietà di cui potesse eventualmente godere. Fissiamo ora l'attenzione sul caso praticamente più interessante – e in cui rientra comunque il campo delle assicurazioni – nel quale abbia senso parlare della somma $A + B$ di due stati A e B e del prodotto λA di uno stato A per un numero λ positivo, negativo o nullo. Si dovrà naturalmente ammettere che lo stato nullo, O, precedentemente introdotto soddisfi la condizione $A + O = A$ (qualunque sia A) e che valgano tutte le proprietà dei sistemi lineari. Che in tal caso nuovi problemi possano sorgere o altri esser messi in una nuova luce, risulta dalla semplice osservazione che ogni passaggio da A a B può essere concepito come l'aggiunta allo stato iniziale A di un nuovo stato $C = B - A$. Il modo formalmente più semplice di stabilire il valore di $Q(A, B)$ consiste allora evidentemente nel porre

$$[13] \qquad Q(A, B) = P(C), C = B - A \cdot$$

In tal caso il prezzo del passaggio dipende soltanto da C e non dallo stato iniziale A; ciò vuol dire che non si avrebbe nessuna facilitazione nè alcun aggravio nell'acquisto di C per il fatto che C venga associato a uno stato precedente A non nullo per trasformarlo nello stato B.

Tale criterio per determinare i prezzi dei passaggi lo diremo criterio III e vedremo che esso non può coincidere nè col I nè col II. Lo si potrebbe anche chiamare criterio vettoriale, in quanto il prezzo del passaggio da A a B dipende soltanto dal vettore $B - A$.

Valendo il criterio III, la [1], condizione necessaria e sufficiente per evitare incongruenze, si riduce alla

$$[14] \qquad P(A) + P(B) \geq P(A + B)$$

e si ha poi

$$[15] \qquad R(A) = - P(-A).$$

Se supponiamo

$$[16] \qquad P(\lambda A) = \lambda P(A) \quad (\text{per ogni } \lambda \geqq 0)$$

la [14] equivale alla

$$[17] \qquad P\left(\frac{A+B}{2}\right) \leqq \frac{1}{2} \{P(A) + P(B)\} \cdot$$

Ciò significa che attenendosi al criterio III (vettoriale) e supposto che valga la [16], condizione necessaria e sufficiente per la non incongruenza è che il prezzo P sia una funzione *concava.*

9. *Dei prezzi definiti da funzioni concave.* — Se si hanno n funzioni $f_1, f_2, \cdots, f_n$ lineari omogenee, per le quali cioè $f(A+B) = f(A) + f(B)$, $f(\lambda A) = \lambda f(A)$, e assumiamo come valore di $P(A)$ il massimo fra i valori $f_1(A), f_2(A), \cdots, f_n(A)$, la funzione P risulta ovviamente concava e si ha inoltre, come corollario, che il minimo fra gli stessi valori è $R(A)$. Tale criterio di costruzione è importante perchè, per note proprietà delle funzioni concave, è valido in generale, nel senso che, assegnata comunque una funzione concava $P(A)$ soddisfaciente la [16], esiste sempre un insieme di funzioni lineari omogenee atto a costruirla nel modo illustrato; solo che in genere tale sistema consterà di infinite funzioni, mentre con un numero finito se ne potrà ottenere soltanto una rappresentazione approssimata.

L'interpretazione pratica di tale teorema è semplice e significativa. Una funzione lineare e omogenea altro non è infatti che un sistema di prezzi *additivo*, un « tariffario additivo » se così si vuol dire, congegnato cioè secondo la più facile proprietà: che il prezzo dello stato risultante dalla somma di più altri è la somma dei rispettivi prezzi. E osserviamo incidentalmente che, attenendosi al criterio III, se e soltanto se i prezzi sono additivi il sistema è conservativo (come risulta dalla [14] cambiando di segno A e B e tenendo conto che $P(X) = R(X) = -P(-X)$ se il sistema è conservativo). Orbene, consideriamo contemporaneamente un certo numero di tariffari additivi e determiniamo il prezzo dei singoli stati calcolandolo secondo il tariffario che per ciascuno di essi risulta più gravoso: con questo procedimento otteniamo il più generale sistema di prezzi che soddisfi la [16] e consenta il criterio III.

Nel campo delle assicurazioni costituiscono altrettanti tariffari additivi quelli dei premi puri secondo le diverse basi tecniche; un esempio generale di tariffario del tipo che ci interessa, concavo e soddisfacente la [16], si ha quindi considerando un insieme di basi tecniche diverse e determinando il prezzo di ogni stato colle basi tecniche che risultino più favorevoli alla compagnia.

Se in particolare consideriamo due basi tecniche, l'una quella normalmente in uso per gli assicurati, l'altra corrispondente alla mortalità, supposta alterata per effetto dell'autoselezione, di coloro che abbandonano l'assicurazione (e che potrebbe anche essere basata su un diverso saggio di interesse), e applichiamo il criterio precedente, si verranno a determinare i prezzi sulle prime basi e i riscatti sulle seconde, ritrovando così un metodo di cui già è stata proposta l'applicazione, partendo da punti di vista affatto indipendenti dal nostro.

Un esempio sostanzialmente identico, ma più pratico perchè più semplice, preso da un campo vicino, è il seguente. Un istituto finanziario applichi i due saggi v e w rispettivamente per operazioni attive e passive, di modo che, indicando con ${}_nS$ la somma S differita di n anni, sarà $P({}_nS) = Sv^n$ se $S > 0$, $P({}_nS) = Sw^n$ se $S < 0$. Con quale criterio dovrà trattarsi un'operazione che si componga di parti di entrambi i segni? Come fissare cioè $P({}_{n_1}S_1 + {}_{n_2}S_2 + \cdots + {}_{n_k}S_k)$ quando le S sono in parte positive, in parte negative? Applicando lo schema precedente, si vede che un criterio vettoriale esente da incongruenze si può ottenere stabilendo di porre P uguale al maggiore dei due valori $\sum_i S_i v^{n_i}$ e $\sum_i S_i w^{n_i}$, mentre il minore sarà R. Lo stesso caso ci dà un esempio di tariffario concavo determinato da infiniti tariffari additivi se stabiliamo invece di determinare P e R come il massimo e il minimo di $\sum_i S_i x^{n_i}$ per x compreso nell'intervallo (w, v), criterio questo che non sempre coincide col precedente; altri criteri intermedi si hanno prendendo il massimo e il minimo valore fra quelli calcolati con s saggi $v_1 = w < v_2 < v_3 < \cdots < v_s = v$.

10. *Proprietà relative al criterio III.* — Di una proprietà semplice e generale godono i sistemi conservativi nel caso del criterio III; essi, se esistono, costituiscono un fascio di spazi lineari paralleli. Il sistema conservativo S_0 contenente l'origine ha l'equazione $P(X) = R(X)$ ed è uno spazio lineare, perchè, se vi appartengono A e B, vi appartiene $A + B$ come risulta avendosi $R(A + B) = -P(-A - B) \geqq -P(-A) - P(-B) = P(A) + P(B) \geqq P(A + B)$, che assieme a $R(A + B) \leqq P(A + B)$, dà $R(A + B) = P(A + B)$. Sia C uno stato (punto) qualunque; il sistema conser-

vativo S_c contenente C è lo spazio parallelo a S_o passante per C, perchè $Q(C, X) + Q(X, C) = 0$ equivale a $R(X - C) = P(X - C)$.

Illustriamo tale proprietà sul precedente esempio. Considerando solo i due saggi v e w, il sistema conservativo contenente l'origine, e cioè l'insieme delle operazioni finanziarie che possono essere riscattate verso restituzione integrale del prezzo, è dato dall'equazione $\sum_i S_i(v^{n_i} - w^{n_i}) = 0$, mentre tutti gli ∞^1 spazi paralleli ($\sum = \text{cost.}$) sono i sistemi conservativi. Se si considerano s saggi $v_1, v_2, \cdots, v_s$ il sistema conservativo contenente l'origine è definito dalle $(s-1)$ equazioni $\sum_i S_i(v_1^{n_i} - v_h^{n_i}) = 0$ $(h = 2, 3, \cdots, s)$ e gli ∞^{s-1} spazi paralleli sono i sistemi conservativi. Nessuno spazio conservativo esiste se ci si basa su tutti i saggi x di (w, v), non potendosi $\varphi(x) = \sum_i S_i(v^{n_i} - x^{n_i})$ ridurre identicamente nulla in tutto un intervallo.

Dimostriamo ora che il criterio III non coincide in generale nè col I nè col II: ciò avviene solo nel caso limite in cui i prezzi sono additivi. Quanto al I basta osservare che se coesiste col III si ha $P(A + B) = P(A - [-B]) = P(A) - R(-B) = P(A) + P(B)$. Se poi coesistono il II e il III si ha da una parte $Q(-A, A) = P(2A) = 2P(A)$, e d'altronde $Q(-A, A)$ è uguale al massimo tra $P(A) - P(-A) = P(A) + R(A)$ e $R(A) - R(-A) = R(A) + P(A)$, ossia $Q(-A, A) = P(A) + R(A)$, da cui $P(A) = R(A)$.

Il criterio III non gode però della proprietà, di cui è già apparsa l'importanza, che il prezzo del passaggio (A, B) dipende soltanto dai prezzi e riscatti di A e di B, e i problemi non si riducono quindi al semipiano P, R $(\Delta = P - R \geqq O)$. Basta osservare che gli insiemi $P(X) = \text{cost.}$, $R(X) = \text{cost.}$ non costituiscono sempre sistemi conservativi, come risulta dal fatto che nel precedente esempio i sistemi conservativi possono non esistere o essere più che ∞^2.

11. *Applicazione del criterio II al caso di funzioni concave.* — Per tale motivo teorico, che ha in pratica, nel caso delle assicurazioni, un'importanza di cui vedremo le ragioni, il criterio III perde gran parte dell'interesse che la sua semplicità sembrava conferirgli. Però le conclusioni raggiunte e i concetti introdotti trattando di esso ci saranno utili, in quanto si estendono facilmente al caso che effettivamente corrisponde alla realtà nel campo assicurativo.

Supponiamo infatti che quando l'acquisto di $C = B - A$ (il riscatto di $-C = A - B$) venga associato a uno stato precedente per realizzare la trasformazione (A, B), si possa avere se mai qualche facilitazione, ma non un aggravio nelle condizioni (mentre per il criterio III si supponeva di non avere mai nè aggravi nè facilitazioni); continueremo poi ad ammettere le [16], mentre la [15] varrà ancora in forza dell'ipotesi precedente, che in formule si esprime (sostituendo nella [13] il doppio segno $\leq$ al posto del segno di uguaglianza)

[18] $$Q(A, B) \leq P(B - A) = R(A - B).$$

Il risultato fondamentale è che, anche in tal caso, la funzione P deve essere concava e che, anzi, se le Q sono basate sul criterio II, la concavità di P è anche sufficiente. Dalla [18] si deduce infatti la [14] perchè $P(A + B) = Q(O, A + B) \leq Q(O, A) + Q(A, A + B) \leq P(A) + P(B)$, e sappiamo d'altronde che, qualora valga la [16], la [14] equivale alla [17]. Supposto inversamente $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$ e $R(A) = -P(-A)$, scende $P(B) - P(A) \leq P(B - A)$, $R(B) - R(A) = P(-A) - P(-B) \leq P(B - A)$ e, fissando $Q(A, B)$ giusta il criterio II, pari alla massima delle due differenze $P(B) - P(A)$ e $R(B) - R(A)$, avremo ancora $Q(A, B) \leq P(B - A)$. Non c'è dunque da cambiare tariffario di prezzi e riscatti, nè da fare alcuno studio particolare per il nuovo caso: ogni considerazione e ogni tariffario validi per il criterio III valgono anche per il criterio II con la limitazione [18].

Nel caso di operazioni finanziarie basate sui due saggi v e w, il passaggio da un sistema di impegni futuri ${}_iS_i$ a uno ${}_iT_i$ costerà, applicando il criterio II anzichè il III, non più il maggiore dei due importi $\sum_i (T_i - S_i) v^i$ e $\sum_i (T_i - S_i) w^i$, ma il maggiore dei due importi $(\sum_i T_i v^i - \sum_i S_i w^i)$ e $(\sum_i T_i w^i - \sum_i S_i v^i)$ se per determinare i prezzi dei due sistemi i saggi da usare sono diversi, mentre il prezzo corrispondente al criterio III rimane inalterato se il saggio è il medesimo.

12. *Osservazioni sull'interdipendenza delle varie operazioni assicurative.* — Gli ultimi risultati raggiunti consentono alcune conclusioni pratiche per il campo delle assicurazioni, sia mettendo in luce incongruenze attualmente esistenti, sia conducendo a effettive limitazioni per le somme ridotte e i riscatti. Sia A un'assicurazione in caso di morte a premio vitalizio e ne sia π il premio annuo di tariffa, B una rendita vitalizia immediata; $A + \pi B$ è allora un'assicurazione vitalizia in caso di morte libera da premio (dovendo ogni anno l'assicurato incassare e versare π). Se il premio π si prende dalle tariffe in uso e la rendita si calcola, come pure l'uso consente, sulle basi

RF 5 %, si arriva alla conclusione che un individuo giovane, volendo contrarre un'assicurazione vitalizia per il caso di morte a premio unico, qualora realizzi questo risultato contraendo separatamente la corrispondente assicurazione a premio annuo e la rendita vitalizia pari al premio, verrà a spendere sensibilmente meno di quanto è previsto dalla tariffa a premio unico (in un caso concreto da noi esaminato, il vantaggio ammonta a circa il 15 % nelle età giovani e continua a sussistere sino verso i 45 anni). In tale esempio si ha dunque un'incongruenza non essendo soddisfatta la [14], per la quale dovremmo avere $P(A + \pi B) \leq P(A) + \pi P(B)$.

Nè c'è da stupirsi che simili incongruenze esistano nella pratica, dato che essa s'ispira a una visione particolaristica che spezzetta il problema unico, sebbene vasto, della determinazione dei prezzi di certe prestazioni e insiemi di prestazioni attive e passive, in tanti problemi staccati (dei premi puri, dei caricamenti, dei riscatti, delle trasformazioni), distinguendo inoltre i varî tipi di assicurazione e quant'altre circostanze speciali presenta ogni singolo caso, visione particolaristica che non potrebbe non urtare contro quella interdipendenza di tutte le operazioni assicurative che costituisce il concetto informatore di tutto quanto precede, e che dai risultati raggiunti viene provata e precisata. La mancanza di un criterio unico fa perdere l'univocità nella soluzione di diversi problemi, ciò che è grave, non tanto per la possibilità che taluna di queste incongruenze possa venir scoperta e sfruttata dagli assicurati, quanto per l'incertezza che ne deriva nel decidere dell'accettabilità o meno di dati affari a determinate condizioni. Così avverrebbe che un ribasso richiesto sul premio unico di un'assicurazione vitalizia in caso di morte potrebbe, ragionando unilateralmente sulla tariffa stessa, sembrare eccessivo e far ritenere inaccettabile la proposta, mentre la scomposizione eseguita nell'esempio precedente potrebbe mostrare al contrario che il prezzo proposto è ancora superiore a quello che certamente è accettabile, in quanto corrisponde alla combinazione di due assicurazioni ciascuna delle quali è accettabile. Più tipico ancora, poichè non entra in giuoco una diversità di basi tecniche, ma solo la mancanza di collegamento fra i criteri dei caricamenti per le diverse tariffe, è il fatto che i premi annui di un'assicurazione temporanea in caso di morte sono talvolta superiori a quelli della corrispondente assicurazione vitalizia.

Le considerazioni che abbiamo fatto non sono certo sufficienti per suggerire fin d'ora alla pratica qualche criterio concreto e comodo che si basi su una visione integrale del problema; ci basterebbe però che valessero a richiamare l'attenzione sulla possibilità di incongruenze cui si è esposti mancando di direttive uniche e chiare, e che ciò potesse contribuire, col tempo, a far raggiungere quella meta che ora possiamo soltanto, lontana, intravedere.

13. *Riduzione a polizza liberata.* — Anche per la determinazione dei valori di riduzione e riscatto, su cui in particolar modo ci dobbiamo soffermare, s'incontrano le stesse incertezze: le formole e le limitazioni che si ottengono non conducono infatti in pratica a risultati univocamente determinati e non costituiscono che delle condizioni necessarie, sulla cui sufficenza nulla si può con certezza affermare. Vedremo che tali inconvenienti si presentano in modo particolare a proposito del criterio III, poichè esso più che gli altri presuppone una determinazione completa e precisa dei prezzi di tutte le combinazioni possibili.

La determinazione del valore di riduzione rientra come caso particolare nella trattazione relativa alle trasformazioni: detta A una data assicurazione e B la corrispondente assicurazione a premio unico, si tratta infatti di determinare un coefficiente ρ tale che A possa venir trasformata in ρB senza che l'assicurato abbia da dare o ricevere nulla dalla compagnia; in formule ρ è la radice dell'equazione

$$[19] \qquad Q(A, \rho B) = 0 \,.\ ^{3)}$$

Una limitazione in ogni caso necessaria per la somma ridotta si ottiene osservando che non si dovrà in nessun caso avere un vantaggio riducendo un'assicurazione e impiegandone il premio per una nuova; risulta così:

$$[20] \qquad \rho \leqq 1 - \frac{\pi}{\pi'}$$

ove π è il premio annuo dell'assicurazione originaria e π' il premio che si dovrebbe pagare a decorrere dal giorno della riduzione per

3) Che tale funzione è crescente e continua e ha una radice unica $0 < \rho < 1$ (come praticamente appare evidente) risulta dalle [16] e [18] ammettendo soltanto che $R(B) > 0$ e convenuto che, per il significato di A, B, è certamente $Q(A, O) < 0, Q(A, B) > 0$.

un'assicurazione che preveda le stesse prestazioni. Ciò risulta intuitivo, ma sarà opportuno mostrare come discenda dalle [1] e [18].

Dalla [3] si ha $Q(A, \rho B) + Q(\rho B, A) \geqq 0$ ossia, per la [19], $Q(\rho B, A) \geqq 0$. Ammessa la [18], deve a maggior ragione risultare $P(A - \rho B) \geqq 0$, e $P(A - \rho B)$ rappresenta, se positivo, il premio unico necessario per garantire la differenza fra la somma $(1 - \rho)$ e la somma π/π' che si potrebbe assicurare continuando il versamento del premio π; perchè tale eccedenza esista dev'essere natutalmente $(1 - \rho) > \pi/\pi'$.

Osservando che il riscatto dell'assicurazione ridotta non deve in nessun caso superare quello dell'assicurazione originaria, risulta

$$R(A) \geqq \rho R(B); \tag{21}$$

infatti

$$R(A) = -Q(A, O) \geqq -Q(A, \rho B) - Q(\rho B, O) = -Q(\rho B, O) = R(\rho B) = \rho R(B).$$

Come caso interessante possiamo considerare quello in cui vale

$$R(A) = \rho R(B); \tag{22}$$

ciò significa che riscattando immediatamente dopo la riduzione si ha lo stesso importo che riscattando senz'altro.

Consideriamo in modo particolare le riduzioni e i riscatti in base ai tre criteri studiati.

Applicando il criterio I:

$$Q(A, \rho B) = P(\rho B) - R(A) = \rho P(B) - R(A) = 0$$

$$\rho = \frac{R(A)}{P(B)} \tag{23}$$

$$R(A) = P(B) \leqq \left(1 - \frac{\pi}{\pi'}\right) P(B) \cdot \tag{24}$$

La [22] è soddisfatta col criterio I quando e soltanto quando B non sia dissipativo.

Applicando il criterio II:

$$0 = Q(A, \rho B) = \text{mass.} \begin{cases} P(\rho B) - P(A) = \rho P(B) - P(A) \\ R(\rho B) - R(A) = \rho R(B) - R(A) \end{cases}$$

da cui

[25] $$\rho = \min. \begin{cases} \dfrac{P(A)}{P(B)} \\ \dfrac{R(A)}{R(B)} \end{cases}$$

e precisamente sarebbe $\rho = P(A)/P(B)$ se la riduzione conducesse a uno stato più dissipativo, mentre è $\rho = R(A)/R(B)$ nel caso opposto. In questo caso risulta automaticamente soddisfatta la [22] e si ha

[26] $$R(A) \leq R(B)\left(1 - \frac{\pi}{\pi'}\right) \cdot$$

Applicando il criterio III:

$$Q(A, \rho B) = P(\rho B - A) = 0;$$

$\rho B - A$ è un' assicurazione col capitale negativo $\rho - 1$ e premio negativo $-\pi$; indicando con π'' il premio analogo a π', ma per assicurazioni negative (naturalmente $\pi'' \leq \pi'$), si ha $(1 - \rho)\pi'' = \pi$ ·

[27] $$\rho = 1 - \frac{\pi}{\pi'} \cdot$$

La [22] è soddisfatta se, e solo se, nel piano $xA + yB$ la funzione P è lineare entro i due angoli opposti in cui $y/x > -\rho$ ·

14. *Limitazioni per i valori di riscatto.* — Quest'ultimo criterio com'era stato già accennato, e come era del resto prevedibile, non può evidentemente essere applicato senza basarsi su una determinazione dei prezzi di tutte le possibili combinazioni di assicurazioni (positive e negative) fatta secondo un criterio generale. Portano invece a qualche risultato concreto, anche applicati agli attuali sistemi pratici, il criterio I, che però dà solo il massimo di esosità da parte della compagnia e che non è neanche il caso di discutere, e il criterio II che invece, sia per varie notevoli proprietà formali che abbiamo messo in luce, sia per la semplicità e praticità di applicazione, potrebbe essere effettivamente seguito.

Il valore massimo di riscatto che quest'ultimo criterio consente, espresso dalla [26], sarà in genere, supposti i premi calcolati coi procedimenti usuali, qualcosa meno della riserva matematica (calcolata sulle stesse basi tecniche su cui supponiamo fondata la determinazione del premio). Infatti il rapporto π/π' dei premi di tariffa sarà circa uguale (spesso anzi maggiore) del rapporto dei premi puri p/p' e R (B) sarà inferiore al premio unico puro U di B, e $V = U[1-(p/p')]$ è appunto la riserva matematica.

Una limitazione superiore di questo genere è cosa ben nota e intuitiva; abbiamo però anche una limitazione superiore per l'incremento di riscatto da un anno a quello successivo. Quest'ultima l'abbiamo già incontrata ed è espressa dalla relazione ricorrente

$$[28] \qquad v R_{t+1} \leq R + \pi_{t+1},$$

in cui v è il fattore di sconto usato dalla compagnia per liquidazioni antecipate, R_t il riscatto alla fine del t–esimo anno, π_t il premio del t–esimo anno. Da questa, per il caso di assicurazioni con scadenza, per le quali $R_n = 1$, si ottiene la limitazione inferiore

$$[29] \qquad R_t \geq v^{n-t} - \sum_{1}^{n-t}{}_h \pi_{t+h} v^{h-1}.$$ [4]

Ciò si dimostra per induzione: la [29] è, per $t = n - 1$, un caso particolare della [28], e, suppostala valida per $t + 1$, risulta valida per t:

$$R_t \geq vR_{t+1} - \pi_{t+1} \geq v\left[v^{n-t-1} - \sum_{1}^{n-t-1}{}_h \pi_{t+h+1} v^{h-1}\right] - \pi_{t+1} =$$

$$= v^{n-t} - \left\{\sum_{1}^{n-t-1}{}_h \pi_{t+h+1} v^h + \pi_{t+1}\right\} = v^{n-t} - \sum_{1}^{n-t}{}_k \pi_{t+k} v^{k-1}.$$

15. *Modificazioni per tener conto delle provvigioni.* — In tutta la precedente trattazione non ci siamo occupati delle provvigioni; il tenerne conto non conduce però a sostanziali modificazioni nell'impostazione, che ci premeva illustrare nel modo più chiaro, ma solo a complicazioni che era opportuno, in un primo momento, evitare. Ora però, volendo giungere a conclusioni più precise per il problema che abbiamo a trattare, dovremo preoccuparci anche di questo fattore,

4) Cfr. tabella allegata.

accennando brevemente ai principi su cui una trattazione completa, che ne tenga conto, dovrebbe basarsi.

Dicendo $\alpha(A, B)$ la (eventuale) provvigione per il passaggio (A, B) ($\alpha = 0$ se non vi ha luogo a provvigioni), il prezzo di tale passaggio, rispettivamente al lordo e al netto della provvigione è $Q'(A, B)$ e $Q''(A, B)$, con $Q'(A, B) - Q''(A, B) = \alpha\,(A, B)$; basta osservare da una parte che l'importo effettivamente incassato dalla compagnia è $Q''(A, B)$ e d'altra parte che l'importo effettivamente versato dal cliente è $Q'(A, B)$ per vedere che nel caso presente per evitare incongruenze debbono essere soddisfatte tanto la

$$[1'] \qquad Q'(A, B) + Q'(B, C) \geqq Q'(A, C),$$

che la

$$[1''] \qquad Q''(A, B) + Q''(B, C) \geqq Q''(A, C),$$

dedotte dalla [1] cambiando Q in Q' e Q''.

Lo sviluppo di una trattazione analoga a quella finora svolta, che tenesse conto di una tale duplice limitazione, sarebbe però priva d'interesse se non avesse lo scopo di sviscerare i difficili problemi relativi alla commisurazione delle provvigioni, ciò che ci porterebbe troppo lontano. Per esaminare singoli casi quali possono presentarsi in pratica, e cioè assumendo come misura delle provvigioni quella in pratica effettivamente adottata, senza interessarsi se per sè stessa tale misura contenga delle incongruenze, ma solo preoccupandosi di quelle relative ai prezzi netti (quelle cioè risultanti dalla [1'']) che direttamente riguardano la compagnia, basterà appoggiarsi alla trattazione precedente, ove al posto di Q si ponga $Q'' = Q' - \alpha$. E ci limiteremo infatti ad esaminare in tal modo quali modificazioni vadano eventualmente apportate, per effetto delle provvigioni, alle limitazioni trovate per le somme ridotte e i riscatti.

La [19] sarà allora modificata nella

$$[19''] \qquad Q''(A, \rho B) = 0$$

e lo stesso ragionamento che ha portato alla [20] ci condurrà invece alla

$$[20''] \qquad \rho \leqq 1 - \frac{\pi}{\pi'}\left[1 + \frac{\alpha'}{\Pi'(1-c)}\right]$$

dove i nuovi simboli α', Π' e c hanno il significato che risulta dalla spiegazione che segue. Il concetto è sempre quello di prima: ρ deve soddisfare la $Q''(\rho B, A) \geq 0$, ossia $Q'(\rho B, A) \geq \alpha(\rho B, A)$. Sia ancora $1 - \lambda$ la somma attualmente assicurabile col vecchio premio π; avremo $\lambda = 1 - \pi/\pi'$, con lo stesso significato dei simboli come nel n. 13. Contraendo tale assicurazione, supponiamo possa venir liquidata una provvigione α' per 1 di somma, e quindi $\alpha'(1 - \lambda)$ nel caso concreto; per la corrispondente assicurazione a premio unico sia Π' il premio unico per 1 di somma, e $c\Pi'$ la provvigione liquidabile. Se, dopo la riduzione a ρ, l'assicurato impiega il premio π per la nuova assicurazione con somma $1 - \lambda$ e contrae una nuova assicurazione a premio unico per la somma $\mu = 1 - (1 - \lambda) - \rho = \lambda - \rho$ necessaria per ricostituire l'assicurazione originaria, la compagnia incassa $\mu\Pi'$ e paga in provvigioni $\alpha'(1 - \lambda) + c\,\mu\Pi'$. La $Q''(\rho B, A) \geq 0$ implica dunque che

$$\mu\Pi' \geq \alpha'(1 - \lambda) + c\,\mu\Pi',$$

$$\mu\Pi'(1 - c) \geq \alpha'(1 - \lambda), \qquad \lambda - \rho = \mu \geq \frac{\alpha'(1 - \lambda)}{\Pi'(1 - c)},$$

$$\rho \leq \lambda - \frac{\alpha'(1 - \lambda)}{\Pi'(1 - c)} = 1 - \frac{\pi}{\pi'}\left[1 + \frac{\alpha'}{\Pi'(1 - c)}\right].$$

Tale risultato mostra che la [20] non costituisce – quando si voglia tener conto delle provvigioni – una limitazione sufficiente, e ciò è tanto più notevole perchè esistono effettivamente delle condizioni di polizza che prevedono la determinazione della somma ridotta in base a $\rho = 1 - \pi/\pi'$; questo metodo dà somme ridotte troppo grandi, tali da portare all'incongruenza $Q''(\rho B, A) < 0$.

Nel caso della [22] si ha come limite superiore del riscatto,

$$[26''] \quad R(A) \leq R(B) \cdot \left[1 - \frac{\pi}{\pi'}\left(1 + \frac{\alpha'}{\Pi'(1 - c)}\right)\right] = R(B) \cdot \left(1 - \frac{\pi}{\pi'}\right) - R(B) \cdot \frac{\pi}{\pi'} \cdot \frac{\alpha'}{\Pi'(1 - c)}.$$

Questa relazione sostituisce, adottando il punto di vista seguito in questo lavoro, la restrizione usualmente ammessa che dà come limite superiore del riscatto la riserva zillmerata; essa le è anzi equivalente – entro i limiti d'approssimazione con cui il limite superiore del precedente paragrafo si poteva identificare colla riserva – nel caso in cui il caricamento per provvigioni costituisca una percentuale fissa del premio, cosicchè la provvigione venga ad essere commisurata sul premio unico: $\alpha = (kP_x)\, a_x = kA_x$ (ove con P_x, a_x, A_x indichiamo premio annuo, rendita, premio unico, di un'assicurazione *generica*).

Il fatto che la [26''] non coincide, salvo in questo caso particolare, con la restrizione uguale della riserva zillmerata, si spiega per la diversità essenziale nei punti di partenza. Abitualmente si considera il problema dei riscatti piuttosto da un punto di vista retrospettivo, cosicchè la base della commisurazione è costituita dai versamenti fatti dall'assicurato al netto della parte per varî motivi consumata, e perciò figura fra tali motivi la provvigione effettivamente liquidata. Il nostro è invece un punto di vista prospettivo: quello che consideriamo è lo sgravio della compagnia dagli impegni futuri che il riscatto estingue. È per tal motivo che nella [26''] interviene non la provvigione pagata, che è un fatto passato che non ci interessa più, ma la provvigione nuova che potremmo dover pagare.

16. *«Equità» e «opportunità» nella determinazione del riscatto.*— Abbiamo dunque ottenuto delle limitazioni per i valori di riscatto; esse sono necessarie, ma non si può dire se e in quale caso siano sufficienti, per il che occorrerebbe un esame che abbracciasse contemporaneamente tutte le combinazioni possibili. Supponiamo però che si possa considerare ogni tariffa per sè sola e che tali limitazioni siano sufficienti: la questione che rimane aperta è quella indicata fin da principio sotto il punto *b*), la questione cioè dell'opportunità di fissare i valori di riscatto a un livello più o meno alto entro il campo che le condizioni precedentemente stabilite lasciano libero al nostro arbitrio.

Noi non crediamo, per motivi già spiegati, che dare il massimo costituisca un dovere di equità, nè vediamo alcuna ragione di preoccuparsi eccessivamente dell'interesse di coloro che abbandonano l'assicurazione; ci sembra anzi che, qualora sia in grado di rinunciare a un certo margine dei suoi utili, una compagnia opererebbe più saggiamente abbassando le tariffe piuttosto che aumentando i riscatti, in modo da favorire coloro che mantengono in pieno vigore l'assicurazione. Quelli invece che l'abbandonano non solo meritano minor interessamento per questo stesso fatto, ma anche perchè fra di essi si riversano e ne costituiscono una parte notevole coloro che non riscattano per effettivo bisogno, ma per lo scarso convincimento o per un falso concetto con cui hanno sempre considerato l'assicurazione e per la mancanza di un serio proposito di mantenerla in vigore; non ci sembra fuori luogo che a questa clientela poco desiderabile, da cui la compagnia non può avere un effettivo apporto di solidità al suo portafoglio, sia riservato un trattamento meno favorevole.

Non riteniamo con ciò che sia consigliabile di attenersi al livello più basso possibile per cercare il massimo utile *immediato*: la compagnia ha anche un certo interesse a fissare dei riscatti non troppo bassi per non distogliere dall'assicurazione anche clienti fra i meglio intenzionati che potrebbero preoccuparsi dell'eventualità di future ristrettezze, e soprattutto a stabilirli abbastanza rapidamente crescenti perchè l'assicurato veda, da un certo momento in poi, un vantaggio a ritardare il riscatto. Nel caso contrario, non infrequente in pratica, esso può addirittura esser spinto a riscattare immediatamente nel timore di doverlo fare con maggior danno qualche anno dopo, e avrebbe anche ragione di stupirsi che la compagnia usi un trattamento meno favorevole a chi ha cercato più a lungo di mantenere la polizza in vigore.

Per lo stesso motivo è certamente opportuno rispettare, nella determinazione delle somme ridotte e dei riscatti, la [22]: evitare cioè che sia maggiormente danneggiato chi, anzichè riscattare senza altro, abbia in un primo momento tentato di conservare la polizza ridotta. È per tale ragione che nei precedenti paragrafi abbiamo particolarmente considerato il caso in cui la [22] sussista.

17. *Considerazioni sul «massimo d'opportunità».* — Come conclusione concreta si dovrebbe trarre che gli attuali riscatti sono *inutilmente* superiori alla misura opportuna nei primi anni, mentre potrebbero essere *utilmente* migliorati per durate trascorse più alte. Quanto al riscatto nei primi anni, pensiamo che sarebbe da evitare il salto attualmente esistente al termine del periodo di carenza, tanto grande da far sì che anche un anno e più prima di tale termine esiste la possibilità di realizzare un saldo attivo come differenza fra il riscatto iniziale scontato e i premi dovuti. Sarebbe più indicato un andamento della curva dei riscatti per cui essa si raccordi insensibilmente al primo tratto a riscatto nullo; tale tratto verrebbe anzi così a perdere alquanto il significato di un periodo di carenza arbitrariamente stabilito; successivamente i riscatti potrebbero, grazie a ciò, crescere più rapidamente, in modo da favorire chi tenga più a lungo in vigore la polizza; da un certo istante in poi i riscatti risulterebbero anzi più elevati di quelli attuali, il che in molti casi è addirittura necessario per eliminare la prima incongruenza da noi rilevata.

Impostato così il problema secondo il punto di vista a cui ci ispiriamo, è evidente che il concetto di *optimum* non poteva avere altro significato che quello di massima opportunità; ma « opportunità » non può avere alcun senso assoluto, può avere soltanto un senso relativo, in relazione cioè a certi scopi che si desidera raggiungere.

Preoccupandoci, come abbiamo fatto, di riservare un sensibile margine di utile nei riscatti prematuri e di favorire la conservazione in vigore delle polizze, quello che si cercava di tenere in vista era l'interesse della compagnia *a lungo andare*, per cui importa, ben più che l'utile immediato, la conservazione del portafoglio, ed è riguardo a tale scopo che i riscatti determinati in base ai concetti enunciati dovrebbero costituire *l'optimum*.

Questo implica naturalmente una specie di previsione degli effetti delle misure suggerite sulla frequenza degli storni. Ne giudichiamo utile l'adozione in quanto riteniamo presumibile che l'influenza negativa dell'abbassamento dei riscatti nei primi anni sulla produzione e sulla conservazione delle polizze di recente emissione non debba essere forte e riguardi prevalentemente quei clienti che abbiamo qualificati indesiderabili. Ciò ben inteso non ha maggior valore di quello che possa avere un'impressione personale, ma non altrimenti che con un'impressione personale si può mai giudicare *a priori* delle conseguenze di una qualunque riforma nel campo che essa si propone di influenzare.

Valore minimo del prezzo di riscatto (°/₀₀) in base al saggio di sconto del 4% per un'assicurazione a premio annuo costante π, h anni prima della scadenza. [5]

	π = 2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
h=1	942	932	922	912	902	892	882	872	862
2	885	866	846	826	807	787	768	748	728
3	831	802	774	745	716	687	658	629	600
4	779	742	704	666	628	591	553	515	477
5	729	683	637	590	544	498	452	405	359
6	681	627	572	518	463	409	354	300	245
7	635	573	510	448	385	323	261	198	136
8	591	521	451	381	311	241	171	101	30
9	548	471	393	316	239	161	84	7	—
10	507	423	338	254	169	85	1	—	—
11	467	376	285	194	103	12	—	—	—
12	429	332	234	137	39	—	—	—	—
13	393	289	185	81	—	—	—	—	—
14	358	248	138	28	—	—	—	—	—
15	324	208	93	—	—	—	—	—	—
16	292	170	49	—	—	—	—	—	—
17	260	134	7	—	—	—	—	—	—
18	230	99	—	—	—	—	—	—	—
19	201	65	—	—	—	—	—	—	—
20	174	32	—	—	—	—	—	—	—
21	147	1	—	—	—	—	—	—	—
22	121	—	—	—	—	—	—	—	—
23	97	—	—	—	—	—	—	—	—
24	73	—	—	—	—	—	—	—	—
25	50	—	—	—	—	—	—	—	—
26	28	—	—	—	—	—	—	—	—
27	7	—	—	—	—	—	—	—	—
28	—	—	—	—	—	—	—	—	—

[5] Cfr. formula [29].