PARTE TERZA

TRACCE ESEMPLIFICATIVE

18. Premesse.

Ho detto nel n. 10 che le « tracce esemplificative » sono intese a suggerire una linea di presentazione di alcuni argomenti, non la forma precisa adatta per un libro di testo o per una lezione. Consiglierei di rileggere quei cenni per evitare dubbi superflui.

Vorrei ancora aggiungere che non so se e quanto vi possa essere di « originale » nelle soluzioni prospettate, nè cosa specificamente posso aver trovato in questo o quell'Autore e se ivi fosse inteso come cosa nuova o notoria. Comunque non pretendo alcun merito e mi scuso se ignoro chi potrebbe rivendicarlo.

Così stando le cose, sarò ben lieto per ogni utilizzazione di tutti o parte di tali suggerimenti da parte di chiunque, autore di libro di testo o insegnante o studente, senza alcun desiderio di vedermi per ciò nominato. Preferisco anzi di no, perchè ognuno è libero di alterare l'esposizione nel modo che preferisce (appositamente o inavvertitamente), e non vorrei (come a volte capita) apparire corresponsabile di cose (magari migliori, ma forse a volte no) che non rispecchiano il mio modo di vedere. Ciò stabilito, sarò volentieri a disposizione, nei limiti del possibile, di chiunque mi chieda chiarimenti o consigli in merito alle questioni qui discusse.

19. Parole introduttive.

Questo primo esempio di « traccia esemplificativa » ha lo scopo di precisare, all'ingresso nei licei, il nesso fra ciò che si considera già appreso e ciò che seguirà. Qualcosa è indubbiamente necessario dire, per evitare disorientamenti perniciosi; naturalmente, un discorso introduttivo troppo lungo in termini generici rischierebbe di non esser seguito e di annoiare; specie nell'esposizione orale, la cosa migliore è probabilmente di somministrare queste precisazioni introduttive a piccole dosi, premettendole e intercalandole ai singoli argomenti nei punti appropriati, e anche ripetendole.

Comunque, l'« arte » è cosa individuale e ciascuno si regolerà come riterrà meglio. Volevo solo avvertire che, come sempre e ancor più, questa prima « traccia » indica lo spirito in cui, secondo i « suggerimenti » che si propongono, l'insegnante dovrebbe interpretare il suo insegnamento, restando a lui di scegliere il modo per informarne gli studenti affinchè sappiano a loro volta in che spirito ascoltarlo.

Il discorso, se si volesse farlo tutto di seguito (come qui è opportuno per presentarlo, e come forse lo sarebbe in un libro di testo a titolo di « lettura »), sarebbe il seguente.

Nella scuola elementare e nella scuola media sono già state apprese molte cose, in particolare di aritmetica e di geometria. Nei licei si procede oltre, si studieranno parecchie cose nuove (e poi la matematica ne offre moltissime altre, che si studiano soltanto all'Università, nelle Facoltà scientifiche); ma, prima di tutto, si deve riordinare un po' le idee sulle cose già apprese, riflettere sui fondamenti, approfondire la conoscenza di vari dettagli, chiarire meglio le connessioni fra diversi argomenti.

Il programma del 1° biennio è inteso in gran parte a questo lavoro di sistemazione, oltre che a completare l'insieme delle conoscenze già acquisite con argomenti nuovi, che preludono a quelli ulteriori che si studiano nel triennio successivo.

In particolare, si tratterà di riprendere e approfondire lo studio dell'aritmetica e della geometria, ciò che si farà, sia per l'aritmetica che per la geometria, parte nel primo anno e parte nel secondo, per richiamare separatamente l'attenzione su questioni che è opportuno, sotto certi aspetti, saper distinguere. In compenso, vedremo meglio la connessione (anzi identità) di certe questioni che si presentano sia sotto veste aritmetica che sotto veste geometrica.

Nell'aritmetica ci si occupa di numeri. Anticamente la parola « numero » si usava solo per indicare i numeri interi (anzi soltanto quelli positivi), che servono per « contare » oggetti e per indicare la misura di grandezze nel caso speciale in cui siano esattamente multiple di una certa « unità di misura ». Solo gradualmente si è imposta la necessità di trattare insieme, senza discriminazioni, tutti i « numeri » (o « numeri reali ») nell'accezione attuale, cioè atti alla misura di qualunque grandezza, in senso positivo o negativo; la principale difficoltà pratica al render familiare e intuitiva tale nozione risiedette, per molto tempo, nella mancanza di una forma di scrittura idonea. Soltanto nel secolo scorso, infatti, entrò nell'uso comune la scrittura con cifre decimali ([16]) grazie alla quale ogni numero reale si esprime ovviamente dandone le infinite cifre decimali (apparentemente in numero finito se da un certo punto in poi sono tutte zero). Ciò che corrisponde al concetto del sistema metrico decimale: una lunghezza inferiore al metro si misura in decimetri, quella inferiore al decimetro in centimetri, e poi in millimetri e così via indefinitamente.

È noto che il risultato della divisione fra due interi, ossia il valore di una frazione m/n con m ed n interi, è un numero *definitivamente periodico* (cioè la cui scrittura decimale si ripete periodicamente, almeno da un certo punto in poi), e che viceversa un tale numero è sempre ottenibile in quel modo ([17]): tali numeri si dicono *razionali*, e gli altri *irrazionali*. La denominazione è infelice (risente dello sgomento dei pitagorici quando scopersero che $\sqrt{2}$, rapporto della diagonale al lato del quadrato, è irrazionale, smentendo la loro congettura che tutti i numeri fossero razionali); la proprietà della « definitiva periodicità » per la scrittura decimale mostra invece che, in certo senso, « quasi tutti i numeri sono irrazionali » ([18]).

Per riservare al II anno la discussione implicante la « continuità » (nel campo dei numeri, così come sulla retta) nel I anno ci soffermiamo soltanto (esplicitamente) a discutere di proprietà dei numeri razionali.

Che l'argomento aritmetico e quello geometrico siano strettamente collegati è chiaro per il fatto stesso dell'uso già fatto della rappresentazione cartesiana. I punti di una retta sono indicati mediante un numero (ascissa), e del resto è ovvio perchè essa è il numero che rappresenta la grandezza « distanza del punto dall'origine », con segno dipendente dal verso. I punti di ascissa razionale sono quelli costruibili (partendo da due di essi, p. es. i punti $x=0$, origine, ed $x=1$) sommando segmenti già ottenuti e dividendoli in parti uguali.

Nella geometria, però, ci limiteremo inoltre, nel I anno, alla sola

---

([16]) Vedere nota in calce ([5]).

([17]) La stessa proprietà vale naturalmente in un qualunque sistema di numerazione, e non solo come particolarità del sistema in base 10; lo si potrà vedere studiando le « classi di resti (mod. n) » (I anno), ma è ovvio pensando al « perchè » del caso noto.

([18]) Si potrebbe accennare — come notizia per i più interessati — al fatto che (in base al principio della corrispondenza biunivoca) i razionali sono tanti quanti gli interi, mentre gli irrazionali tanti quanti i reali ossia quanti i punti di una retta o piano o spazio ecc., che sono (in altro senso) « assai di più ».

geometria *affine*: si è già visto nella scuola media quanto sia utile prescindere dalle nozioni metriche ogni qual volta la loro considerazione non sia richiesta obbligatoriamente dalla natura metrica del problema considerato. Inoltre ci limiteremo alla geometria piana (dello spazio ci si occupa, espressamente, soltanto nel IV anno). Ma ciò basterà a stabilire autonomamente la costruzione di ascisse sulla retta (senza presupporre alcuna nozione, di per sè metrica, di lunghezza o distanza).

Le nozioni metriche verranno anch'esse introdotte nel II anno.

È appropriato avvertire che la trattazione che seguiamo, volendo seguire un concetto più astratto (adatto per finalità critiche, importanti benchè non rispondenti alle finalità presenti), potrebbe considerare gli *assiomi*, anzichè come proprietà di enti già intuitivamente noti, come condizioni atte a definire tutti gli enti astratti che le soddisfano (provandone la non-contraddittorietà).

20. L'INSIEME (E CAMPO) DEI NUMERI RAZIONALI.

Sostanzialmente l'argomento è impostato già in quanto detto al riguardo nel precedente n. 19.

Tutte le proprietà possono essere agevolmente dimostrate (spesso utilizzando il sottoinsieme dei numeri decimali limitati: ad es. verificando che è ovunque denso resta provato che lo è, a maggior ragione, l'insieme dei razionali). Si può poi accennare (a titolo informativo, al più indicando per sommi capi la via e le finalità di tale modo di procedere), come alcune proprietà, assunte come « assiomi » bastino « sostanzialmente » a caratterizzare il campo razionale ... (purchè si riesca a dare un'idea di cosa significa « sostanzialmente » facendo intuire cos'è un « isomorfismo » ma senza usare questo o simili termini tecnici).

Come avvio alla considerazione più esplicita degli irrazionali (nel II anno), conviene nel I anno accennare a questioni di approssimazione (uso di un numero decimale limitato, p. es. a 6 decimali, per indicare con errore $\leq \frac{1}{2}(10^{-6})$ un numero qualunque (indifferentemente razionale o no); propagazione degli errori nelle diverse operazioni; eventuali cenni al calcolo automatico, uso di virgola fissa o mobile, ecc.).

È utile ricorrere subito alla rappresentazione geometrica (ascisse sulla retta) come cosa già intuitivamente nota (attraverso la nozione di lunghezza); si può avvertire (come fatto in n. 19) che ciò sarà del resto ritrovato subito (n. 20) come conseguenza autonoma delle premesse di geometria affine del piano.

21. Geometria affine del piano.

Tutta la trattazione scende con tutta naturalezza dalle dizioni del programma (I anno, sezione B): *Il piano come insieme di punti e le rette come suoi sottoinsiemi: incidenza, parallelismo, direzione.* (Qui si inserirebbe naturalmente l'argomento *Traslazioni*, menzionato nel II anno). *Proprietà di ordinamento della retta e di partizione del piano.* (Segue: *Segmenti, figure convesse, angoli, poligoni*: su ciò non sembra necessario dir nulla come « traccia », ma al più raccomandare di sfruttare molto la nozione di *convessità* per le sue ricche possibilità di applicazioni).

Anche in questo caso il concetto suggerito è quello di considerare gli « assiomi » come proprietà già note e intuitive dello spazio affine, ma è forse più facile dare anche la sensazione della possibilità di un'interpretazione costruttiva in senso astratto. A ciò sarà fatta allusione con qualche cenno incidentale, ma, in fondo, si tratta di pensare d'aver cominciato con parole come queste: si definisce piano affine una struttura formata da un insieme in cui è fissata una famiglia di sottoinsiemi godenti delle seguenti proprietà (che enunciamo, per agevolare il riferimento alla geometria nel senso intuitivo, chiamando « piano » l'insieme totale, « punti » i suoi elementi, « rette » i sottoinsiemi della famiglia indicata, ed usando locuzioni come « allineati » per « della stessa retta », « passare per un punto » per « contenerlo », ecc.).

Assioma 1: Per due punti passa una e una sola retta.

Corollario: Due rette distinte hanno al più un punto in comune.

Definizione: Due rette si dicono *incidenti* se hanno un punto in comune; se non ne hanno si dicono *parallele*. (Oss.: se non ci si riferisse esclusivamente al piano, come qui facciamo, si dovrebbe distinguere dicendo: « si dicono parallele se appartengono a un medesimo piano, e altrimenti sghembe »; naturalmente sarebbe stata data una definizione di « piano »).

Assioma 2: Per un punto passa una e una sola parallela a una retta data.

Corollario: Due rette parallele a una stessa retta sono parallele tra loro (altrimenti, nel punto comune, l'Ass. 2 cadrebbe in difetto).

Definizione: Si dice *direzione* la proprietà comune delle rette classificate per parallelismo (che ne determina — se tale terminologia è nota — una partizione in « classi di equivalenza »).

Osservazione: Se si convenisse di chiamare le *direzioni* « punti impropri » (e il loro insieme « retta impropria »), gli Ass. 1-2 direbbero che per due punti passa una e una sola retta e due rette hanno in comune uno e un solo punto (non distinguendo punti impropri e « propri », come, per distinguerli, occorrerebbe dire gli altri). È questo il linguaggio, per molti versi opportuno, della *geometria projettiva*; ma ciò esula dal programma che si attiene al punto di vista « affine », più direttamente aderente alle esigenze e applicazioni pratiche.

Assioma 3: Esistono tre punti non allineati.

Osservazione: Ciò serve solo ad escludere il caso banale in cui, anzichè un piano, si abbia soltanto una retta. E basta ciò per implicare che di punti ne esistono infiniti (come si vedrà). Notiamo poi che una retta non può ridursi a un solo punto (ma basta escludere ciò senz'altro: non vale la pena di dedurlo dagli assiomi).

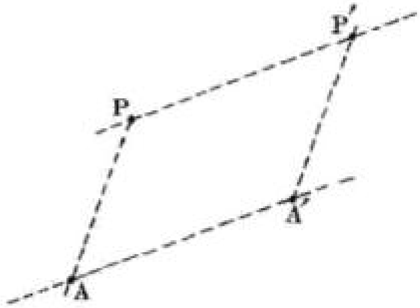

Fig. 1

Definizione: Diciamo *traslazioni* le trasformazioni che portano ogni punto P nel corrispondente P', $(P \rightarrow P')$, definite mediante la seguente costruzione. Consideriamo un punto A e il suo corrispondente A'; per ogni altro punto P (non allineato con A e A') il corrispondente P' si ottiene « con la regola del parallelogrammo », ossia (v. fig. 1) come intersezione dalla parallela per P alla retta per A ed A' e della parallela per A' alla retta per A e P.

Osservazione: Nell'interpretazione geometrica intuitiva (ad es. guardando la figura) è ovvio che risultava definita la stessa traslazione partendo da una qualunque altra coppia di punti corrispondenti, B e B' anzichè A e A'. Partendo dagli assiomi ciò non è ovvio, ma si potrebbe dimostrare (teorema dei triangoli omologici); per semplicità ammettiamo tale fatto che risulterà indirettamente convalidato dal seguito.

Con tale ammissione risulta subito che in una traslazione punti allineati si conservano allineati, anzi ogni retta viene portata in una retta parallela (e in particolare le rette nella direzione della traslazione, cioè le congiungenti di punti corrispondenti P e P', rimangono invariate, scorrendo su sè stesse). Risulta inoltre sanata la lacuna nella definizione (per P allineato con A ed A'): basta prendere un punto B (non allineato) e costruire B' col parallelogrammo $BAA'B'$, e quindi P' si costruisce allo stesso modo col parallelogrammo $PBB'P'$.

Queste proprietà, anzi, caratterizzano le traslazioni; il prodotto di traslazioni è permutabile e dà sempre traslazioni (gruppo commutativo); comoda la notazione additiva: indicando con $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, ... delle traslazioni, o spostamenti — in seguito (III anno) si interpreteranno come vettori — si può scrivere

$$P'=\boldsymbol{s}+P, \qquad P''=\boldsymbol{t}+P', \qquad P''=\boldsymbol{t}+(\boldsymbol{s}+P)=\boldsymbol{s}+(\boldsymbol{t}+P)=$$
$$=\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}+P=(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t})+P=(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{s})+P, \ldots;$$

in particolare iterando una traslazione $\boldsymbol{s}$ si hanno le traslazioni $2\boldsymbol{s}$, $3\boldsymbol{s}$, ..., $n\boldsymbol{s}$, ..., e così, date due (o più) traslazioni $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{t}$ si possono costruire le traslazioni $n\boldsymbol{s}+m\boldsymbol{t}$ (n, m interi positivi). Ma è definita anche la traslazione inversa (se $\boldsymbol{s}$ porta P in $P'=\boldsymbol{s}+P$, l'inversa che porta P' in P si esprime naturalmente con $-\boldsymbol{s}$

$$(P=-\boldsymbol{s}+P'=-\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}+P),$$

e quindi $n\boldsymbol{s}+m\boldsymbol{t}$ ha senso per n, m anche negativi.

È facile vedere come si ottiene un senso per $n=\frac{1}{2}$ (e quindi $=1/4$, $=1/8$, ecc.) e multipli (e, volendo, per tutti i razionali; per i reali, come s'è detto, se ne parlerà al II anno; per ora basti l'intuizione della continuità, oppure si può fingere di ignorarli). Date due coppie di punti corrispondenti in una traslazione $\boldsymbol{s}$, siano A ed A', B e B' consideriamo le rette per A e B' e per A' e B (cioè le diagonali del parallelogrammo $BAA'B'$, perciò non parallele) e il loro punto d'intersezione, C (centro del parallelogrammo). La parallela per C alla retta per A e B taglia la retta per A ed A' in un punto D, e si vede che la traslazione $A \to D$ è la (unica, per costruzione) traslazione che, iterata due volte, porta A in A', cioè quella che è naturale indicare con $\frac{1}{2}\boldsymbol{s}$ avendosi $2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{s}\right)=\boldsymbol{s}$. (v. fig. 2).

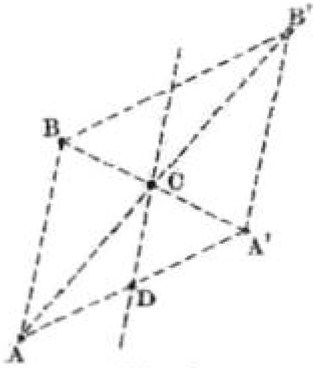

Fig. 2

(Si vede allora che ogni traslazione risulta combinazione lineare, $x\boldsymbol{s}+y\boldsymbol{t}$, di due qualunque (indipendenti) con x e y assumenti almeno tutti i valori razionali; anche reali se si vorrà la continuità; ogni punto P è esprimibile come $P=O+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, con O punto qualunque scelto come « origine », $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ spostamenti nella direzione di due rette per O scelte come « assi »; x e y si dicono coordinate cartesiane e questo sarà il punto di partenza per introdurle nel II anno).

Le *proprietà di ordinamento della retta,* procedendo in tal modo (cioè, pensando la retta non isolata, ma immersa nel piano) risultano conseguenza della nozione di parallelismo. Infatti, particolarizzando il ragionamento precedente al fine particolare presente, il trasporto di lunghezze uguali tra rette parallele è definito dalla regola del parallelogrammo, e, ripetendo due volte il procedimento utilizzando una parallela come stazione intermedia, lo si può fare sulla retta stessa. (Per fare un'analogia: guardando in direzione di un filo non posso apprezzare la distanza di due suoi punti, che vedo sovrapposti; lo posso se guardo la sua immagine in uno specchio posto parallelamente).

Si noti che un confronto fra due distanze o lunghezze ha senso soltanto fra segmenti *paralleli* (nota caratteristica della geometria affine: soltanto passando alla geometria metrica acquista significato un confronto tra segmenti non paralleli, la nozione di ortogonalità, ecc.).

Se si fosse voluto considerare la retta di per sè, non immersa nel piano, si sarebbe potuta appoggiare l'introduzione di lunghezze e ascisse su due nozioni praticamente significative: quelle di *baricentro* e di *corpo rigido*. Per dirla in breve: il punto di ascissa x è il baricentro di una massa $1-x$ nell'origine e di una massa x nel punto-unità (e questa è un'idea utile, coerente con la struttura affine). Oppure si immagina una sbarretta « rigida » spostabile lungo la retta per confrontare direttamente le lunghezze (ma ciò suggerisce maggiormente il trapasso alla struttura metrica, chè l'idea di una sbarra rigida che si dissolve non appena se ne cambi anche di pochissimo la direzione appare certamente del tutto artificiosa).

22. Numeri reali e continuità della retta.

Avendo già stabilito (n. 19) di considerare acquisiti e definiti i numeri reali (attraverso la scrittura decimale), si tratterà soltanto di completarne lo studio, iniziato nel I anno limitandosi, sostanzialmente, ai razionali. Potrà essere opportuno segnalare quelle proprietà che costituiscono « possibili definizioni » (spesso adottate) per chi preferisse non accettare quella più intuitiva (facendo vedere però che cambiano le presentazioni ma la sostanza rimane sempre la stessa).

Piuttosto riterrei opportuni dei chiarimenti, insieme critico-concettuali e pratici, su questioni che spesso divengono confusamente filosofesche (in senso deteriore). Si possono fare obiezioni (al considerare i numeri reali, al pensare i punti della retta come corrispondenti ad essi) in entrambi i sensi: sia ritenendo che così facendo si pretenda un'esattezza troppo spinta, una struttura troppo ricca, oppure invece che si trascurino esigenze possibilmente più spinte (come pensando a grandezze non archimedee). Tutto è chiaro se si avverte che nulla ha senso se non in relazione a uno scopo. Dal punto di vista strettamente logico e matematico, c'è solo da dire se una struttura è contraddittoria oppure no; se non è contraddittoria è lecito occuparsene, e non c'è nient'altro da discutere.

Quanto alle interpretazioni e applicazioni più o meno pratiche, la questione è una semplice questione di utilità. Per le misure pratiche, non ha senso in genere indicare più di 6 o 10 cifre significative; indicarne di più nei risultati è prova di incompetenza; tuttavia sarebbe complicato e fastidioso (anche pericoloso) adottare un'aritmetica includente una regola automatica di arrotondamento, e la cosa più comoda è di pensare che possano aver senso quante cifre decimali si vuole, anche infinite.

Nel caso dei punti, si dirà, non è più questione di convenzione: i punti sulla retta sono « realmente » tanti quanti i numeri reali, e ordinati come i numeri reali? Direi, viceversa, che la convenzione comincia ancor prima, chè già la nozione dei « punti » è una idealizzazione, e non solo quella di una misura delle loro ascisse (come per grandezze che hanno maggiormente una « realtà intuitiva »). Possiamo immaginare lo spazio suddiviso in cellette molto piccole, e può esser comodo (e lo è, indubbiamente!) non complicare le cose fissando dei limiti alla loro piccolezza. Però è difficile dire che senso ciò possa avere al di sotto delle dimensioni atomiche, al di sotto dei limiti di esattezza di misure solo concettualmente possibili, e molto oltre. Direi che in tali condizioni (come in quelle, viceversa, di dimensioni enormemente superiori a quelle dell'universo conosciuto) è assurdo pensare ad un significato qualsiasi. Comunque, volendo adottare, fra i modelli matematici di spazio, uno che si adatti alla geometria nel senso etimologico (dall'agrimensura alla fisica), sarebbe praticamente impossibile fare a meno della idealizzazione dello spazio come insieme di punti e della struttura corrispondente al corpo reale per la retta.

Ma, si dirà in altro verso, perchè non considerare maggiore, fra due segmenti di uguale lunghezza, quello che contiene i due estremi in confronto a quello che ne contiene uno o nessuno? E perchè, nella misura di angoli, non tener conto anche della curvatura nel caso di triangoli curvilinei? Nessun « perchè » può esistere in astratto. In astratto tutto si può fare (con complicazioni più o meno grandi). Ed in pratica tutto può risultare utile in determinate circostanze, ma l'utilità non sempre giustifica complicazioni notevoli. Avviene, anzi, raramente che complicazioni del genere appaiano utili. A volte, però, appaiono utilissime. Tale può essere, per fare un esempio, la definizione (non archimedea) di misura di un insieme I data dal modo di comportarsi per $\rho \to 0$ dell'insieme I_ρ dei punti a distanza $\leq \rho$ da I (definizione di Borchardt).

23. Geometria metrica.

Per trasformare un piano affine in piano metrico occorre introdurre qualche elemento atto a qualificarlo come tale (ad es., prendere ad arbitrio due coppie di rette e dichiararle « ortogonali », o tre segmenti (non paralleli) e dichiararli « di ugual lunghezza », ecc.). La via più elementare rapida e intuitiva sembra però senz'altro quella consistente nell'introdurre la « rotazione ad angolo retto », che resta definita se si prendono ad arbitrio due segmenti non paralleli e si dichiara che sono « ortogonali e di ugual lunghezza ».

Pensandoli (come conviene, e non costa nulla) uscenti da un punto O preso come origine, siano essi i segmenti da O ad U e da O a V, e indichiamo con U' e V' i simmetrici di U e di V rispetto all'origine. La rotazione ad angolo retto intorno ad O (che resta fisso) è quella trasformazione che porta U in V, V in U' (e quindi U' in V' e V' in U; e così per ogni altro punto P il corrispondente P' segue per linearità); c'è naturalmente anche un'altra rotazione ad angolo retto di centro in O, ed è l'inversa della precedente (porta U in V', V' in U', U' in V, V in U). Disegnando la figura in modo che ortogonalità e ugual lunghezza sussistano realmente nel senso fisico (come in fig. 4, non in fig. 3), i punti di ugual distanza da O sono quelli della circonferenza quale si può tracciare col compasso; altrimenti la « circonferenza » è (in senso fisico, della metrica dei moti rigidi) una *ellisse* (cioè, detto alla buona, una circonferenza vista obliquamente; di più nel IV anno).

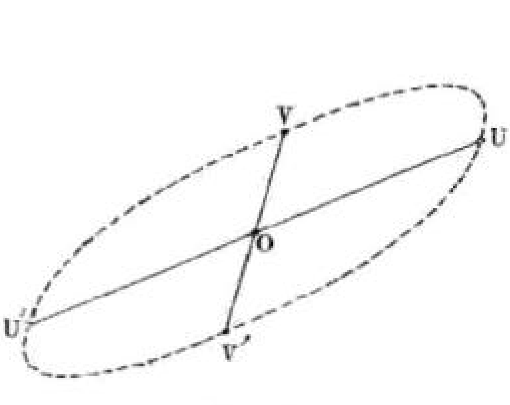

Fig. 3

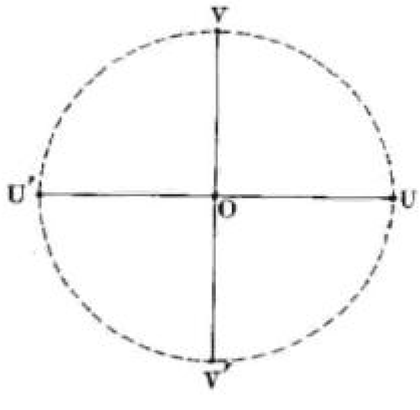

Fig. 4

Probabilmente conviene qui dimostrare il teorema di Pitagora, in modo da avere subito (dal piano cartesiano affine) il piano cartesiano metrico con la distanza « radice della somma dei quadrati » (pur di prendere, naturalmente, un riferimento ortogonale isometrico).

Ciò sembra opportuno premettere a tutte le trattazioni che fanno uso delle coordinate cartesiane, sia per « diagrammi di semplici funzioni » che per argomenti come simmetrie, rotazioni, circonferenza, ecc. In particolare ciò sembra opportuno stabilire prima dell'argomento « polinomi, equazioni, ecc. », premettendo anche in forma generale le necessarie nozioni sullo studio di funzioni in generale come zeri ecc. (affinchè il caso particolare dei polinomi non appaia un argomento a sè).

Sugli altri argomenti vi sarebbero pure molte considerazioni da fare, ma sembra dovrebbero risultare abbastanza ovvie (almeno dopo quanto premesso).

24. Introduzione dei vettori.

Per lo scopo specifico del III anno, cioè per l'introduzione del « piano vettoriale geometrico » (affine), non ci sarebbe che da riprendere in forma sistematica ed espressamente quanto incidentalmente incontrato nel I anno (traslazioni con notazione additiva, $\boldsymbol{s}$, ...), e poi qualcosa apparso di sfuggita nel II.

Sembra però opportuno, all'inizio del III anno, inquadrare (sia pur nel modo più succinto possibile) detto argomento in una premessa generale che faccia intendere come esso sia, non uno strumento limitato al caso piano e di solo interesse geometrico, ma il primo passo nel vasto campo di cui qualcosa sarà esplorato nel IV anno (spazio tridimensionale) e nel V (spazi astratti a n dimensioni).

Cenni, in un possibile ordine di presentazione.

Piano vettoriale: punti $P=O+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, notazione per differenza di punti: $P-O=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, $P-O=2(Q-O)$ (omotetia), ecc.

Nulla cambia per 3 dimensioni (basterebbe aggiungere $\boldsymbol{k}$: $P=O+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$).

Combinazioni lineari di punti: $\frac{1}{2}(A+B)=$punto di mezzo del segmento (A, B), ossia baricentro di A e B con pesi uguali; analogamente (detti A_1, A_2, A_3 i punti $O+\boldsymbol{i}$, $O+\boldsymbol{j}$, $O+\boldsymbol{k}$, punti-unità sugli assi x, y, z) ogni punto è $P=xA_1+yA_2+zA_3+(1-x-y-z)O$, baricentro dei 4 punti A_1, A_2, A_3, O coi detti pesi (coordinate baricentriche).

Vettori nella fisica (semplice menzione ad argomenti di quel corso: forza, velocità, ecc. per dire che è la stessa cosa; però considerandoli « applicati » si aggiunge una circostanza extra).

Sistemi lineari con numero qualunque di dimensioni: applicazioni economiche (vettore delle quantità di n merci, prodotte o consumate, o entrate o uscite o saldo entrate meno uscite da un magazzino; ecc.); applicazioni matematiche: polinomi di grado $\leq n-1$

(combinazioni lineari di $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$), forma astratta di n-uple

$$\boldsymbol{x}=(x_1\,,\ x_2\,,\ ...,\ x_n).$$

Qualche considerazione su scrittura in forma intrinseca (preferibile finchè possibile) e riferita a una base (ove necessario); cambiamento di base, ecc.

L'argomento delle rette nel piano si presta a ripensare il passaggio dalla geometria affine a quella metrica, che conviene fare ex novo. Le considerazioni su intersezioni di rette ecc. sono valide in campo affine, ed è bene notarlo (non importa la scala, non importa se il riferimento è ad assi ortogonali od obliqui). Invece, se ci si chiede se due rette sono ortogonali, se una è bisettrice dell'angolo formato da altre due, quale tra due rette (non parallele) è più distante da un dato punto, ecc., allora la questione non ha senso a meno di non entrare nel campo metrico.

A tal fine, il concetto più appropriato nel caso generale (per n qualunque, e lo esponiamo per $n=3$ pur servendocene solo per $n=2$ fino al IV anno, per farne intendere meglio il significato generale) è quello del *prodotto scalare*. Interessano spesso delle grandezze scalari che dipendono in modo lineare e simmetrico (e omogeneo: ciò in tali questioni viene in genere sottinteso) da due vettori, siano $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. (L'esempio più noto è quello del *Lavoro* come funzione dei due vettori *Forza* e *Spostamento*; non ne parliamo, chè riguarda la Fisica, ma è bene sapere che si tratta della stessa cosa e notare che il lavoro è nullo se Forza e Spostamento sono ortogonali, e altrimenti no a meno che l'uno o l'altro vettore siano nulli).

Il prodotto scalare è legato alla metrica proprio da questa proprietà: il suo annullarsi è condizione (necessaria e sufficiente) per l'ortogonalità dei due vettori; precisamente, di conseguenza, esso è il prodotto scalare di uno dei due per il componente dell'altro ad esso parallelo, e il prodotto scalare di un vettore per sè stesso è il quadrato del suo *modulo* (cioè la lunghezza nel caso di vettore geometrico, o quella grandezza, fisica o altro, che altrimenti rappresenta).

Se prendiamo, per semplicità, un riferimento ortogonale isometrico (cioè: vettori-base $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ unitari e ortogonali), il prodotto scalare di due vettori

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k},$$

che si indica $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ (o, con altre notazioni, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$, $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$, ecc.), si esprime semplicemente come somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

perchè, sviluppando, i termini quadrati

$$(\text{come} \quad u_1\boldsymbol{i} \times v_1\boldsymbol{i} = u_1 v_1 \quad \text{perchè } \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 1 \;)$$

si riducono al prodotto, mentre quelli rettangoli sono nulli essendo ortogonali $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$

$$(\text{cioè} \quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = 0 \;).$$

In generale (senza tali ipotesi sulla base) si avrebbe una somma di termini della forma $a_{hk}u_h v_k$, dove $a_{12} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}$, ecc.

Scomposizione di un vettore, $\boldsymbol{u}$, in un componente parallelo ed uno ortogonale ad altro, $\boldsymbol{v}$, mediante il prodotto scalare. Poniamo

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'', \quad \boldsymbol{u}' = k\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{u}'' \perp \boldsymbol{v} \text{ ossia } \boldsymbol{u}'' \times \boldsymbol{v} = 0;$$

pertanto

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'') \times \boldsymbol{v} = k\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}'' \times \boldsymbol{v} = kv^2, \qquad k = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})/v^2,$$

$$\boldsymbol{u}' = [(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})/v^2]\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{u} - [(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})/v^2]\boldsymbol{v}.$$

Procedendo in tal modo si può ad es. costruire una base di vettori ortogonali, e volendo unitari, partendo da una base qualunque (dalla base $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ ricavarne altra, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ad es. con $\boldsymbol{i}$ parallelo ad $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{j}$ combinazione lineare di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ ortogonale ad $\boldsymbol{u}$, ossia ad $\boldsymbol{i}$, e infine $\boldsymbol{k}$ combinazione lineare di $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ ortogonale ad $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, ossia ad $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$).

Si può dire che $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ è il prodotto dei moduli u e v dei due vettori moltiplicato per un fattore che dipende dall'angolo che essi formano (il « coseno » che s'incontrerà subito: rapporto tra la proiezione e la lunghezza vera), e che è $=1$ per angolo zero, $=0$ per angolo retto, $=-1$ per angolo piatto (vettori paralleli ma di verso opposto).

(N.B. - Io preferirei insistere più sulla forma intrinseca, che in genere è molto più semplice e significativa; ho evitato di usarne di più perchè so che all'inizio appare difficile al lettore non allenato).

25. I NUMERI COMPLESSI E LE FUNZIONI GONIOMETRICHE.

I presenti cenni seguono sostanzialmente la linea da me adottata in *Matematica logico-intuitiva*, Cap. IV, « I numeri complessi » (op. cit. nota in calce ([10])). Saranno perciò molto succinti, potendo venir integrati, per chi ne abbia interesse, con quella trattazione (viceversa notevolmente più ampia di quanto possa rientrare nei programmi dei licei).

Si tratta di partire dall'osservazione che si è già trovato un operatore il cui quadrato è -1: la rotazione ad angolo retto nel piano. [Osservazione, probabilmente non adatta per gli studenti ma come avvertenza per l'insegnante. Non è che senza pensare alla rotazione non si possano costruire operatori con quella proprietà. Nel piano, ogni trasformazione di vettori che porti un vettore $\boldsymbol{u}$ in un qualunque vettore $\boldsymbol{v}$, purchè si stabilisca che $\boldsymbol{v}$ venga portato in $-\boldsymbol{u}$ (e quindi $-\boldsymbol{u}$ in $-\boldsymbol{v}$), gode di tale proprietà. Il guaio è solo che ce n'è troppi; conviene (anzi occorre, ai fini dell'algebra) averne uno solo (cioè due, col suo inverso). Si potrebbe fare una scelta qualsiasi; grazie all'introduzione della metrica c'è una scelta naturalmente spontanea e significativa. Questo è tutto. Cfr. le figg. 3 e 4].

Indicando tale rotazione (come operatore per i vettori del piano) con la lettera i, ogni combinazione lineare $a+ib$ rappresenta una similitudine vettoriale; scrivendola $\rho e^{i\theta}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$, è la rotazione di un angolo θ con moltiplicazione per ρ (similitudine=rotazione · omotetia). Rimangono così definiti i simboli $e^{i\theta}$, $\cos\theta$, $\sin\theta$, di cui si vede direttamente il significato geometrico. Dalla proprietà (ovvia per il significato stesso) $e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}$ scendono facilmente proprietà di sin, cos, ecc.

26. SPAZIO VETTORIALE ASTRATTO.

Vorrei solo riprendere brevemente le considerazioni svolte già, sia nel testo (n. 13) che nella « traccia esemplificativa » per l'introduzione dell'argomento (n. 24), circa la preminenza da dare agli aspetti sostanziali e direttamente significativi anzichè a quelli algoritmici. Ciò che consiste, a mio avviso, nelle due raccomandazioni tra loro connesse:

— di tener sempre presente il significato valevole agli effetti dei diversi problemi (affine o metrico? ruolo privilegiato o meno di certi elementi di riferimento?),

— di esprimersi fin dove si può con notazioni intrinseche (in formule che traducono il pensiero, non lo trasformano in macchinismi algoritmici).

Queste cose sono importanti nelle applicazioni geometriche (dove si vedono a volte semplici espressioni vettoriali sostituite da ingombranti e inespressive valanghe di matrici et similia), ma ancor più indispensabili nel caso astratto, perchè in genere ci si abbandona al puro gioco di calcoli, su vettori e matrici, senza distinguere quali nozioni abbiano un senso o no (p. es. l'ortogonalità: a volte è solo parvenza derivante da scelta arbitraria di un riferimento, a volte no).

Penso che tale argomento non si potrà sviluppare molto, perchè richiederebbe troppo tempo, ma, anche facendone poco, c'è rischio di darne un'idea inadeguata dando eccessivo sviluppo a parti formalistiche considerate soltanto come tali.

Roma, 29 marzo 1967.

BRUNO DE FINETTI

P.S. - NOTIZIE RETROSPETTIVE

A complemento dei cenni dati all'inizio, ecco qualche indicazione sui primi lavori per la preparazione dei programmi (anteriori alla partecipazione dello scrivente).

Il primo progetto di programma (completo di premesse e osservazioni) fu redatto nell'inverno 1960-61 da una Commissione presieduta dal compianto Prof. M. BALDASSARRI e nominata dal C.D.N. Licei che organizzò i primi due convegni sull'argomento:

Gardone, 27-29 maggio 1963,

Camaiore, 14-16 dicembre 1964.

Nella rivista « I Licei e i loro problemi » si trovano pubblicati il programma « Baldassarri » nel n. 1-2, 1961, e quelli « Gardone » e « Camaiore » nel n. 1, 1965.

La versione finale dei programmi deve molto all'impostazione iniziale del BALDASSARRI, da cui differisce, si può dire, per una visione più eclettica derivante da discussioni tra persone di varia tendenza.