LE ISOMERIE VETTORIALI E UNA FORMULA DI CISOTTI PER GLI SPOSTAMENTI RIGIDI

In: *«Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere»*, Milano, 1934,

Vol. LXVII, Fasc. 1-5, pp. 81-98

REALE ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti* — Vol. LXVII - Fasc. I-V — 1934.

LE ISOMERIE VETTORIALI
E UNA FORMULA DI CISOTTI
PER GLI SPOSTAMENTI RIGIDI

Nota del prof. BRUNO DE FINETTI

ULRICO HOEPLI
LIBRAIO DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE

MILANO
1934 — Anno XII

Estratto dai *Rendiconti* del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere
Serie II, Vol. LXVII, Fasc. I-V

Pavia — Premiata Tipografia Successori Fusi — 1934

LE ISOMERIE VETTORIALI E UNA FORMULA DI CISOTTI PER GLI SPOSTAMENTI RIGIDI

Nota del prof. BRUNO DE FINETTI

(Adunanza del 18 gennaio 1934, XII)

Sunto. — Si mostra come la formula di Cisotti per gli spostamenti rigidi fornisca una nuova ed elementare *forma canonica* per le isomerie vettoriali, che possono così venir individuate mediante un unico vettore. Tale forma si presta bene allo sviluppo di un effettivo algoritmo, assolutamente intrinseco, e se ne fa un'applicazione allo studio degli spostamenti rigidi finiti e loro composizione.

1. — L'espressione vettoriale degli *spostamenti rigidi finiti* dedotta recentemente dal Cisotti ([1]) mi sembra notevole anche dal punto di vista del calcolo omografico: essa fornisce infatti una nuova (per quanto mi consta) ed elementare *forma canonica* delle isomerie, che vengono, in tal modo, espresse esplicitamente in funzione di un unico vettore $\mathbf{u}$ attraverso sole e semplici operazioni di calcolo vettoriale (prodotto scalare e vettoriale).

È noto che l'espressione finora usata

$$(1) \qquad \mathrm{Rotor}\,(\varphi, \mathbf{i}) = \cos\varphi + (1 - \cos\varphi)\, \mathrm{H}\,(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + \mathrm{sen}\,\varphi \,.\, \mathbf{i} \wedge$$

rispettivamente

$$\mathrm{aRotor}\,(\varphi, \mathbf{i}) = \cos\varphi - (1 + \cos\varphi)\, \mathrm{H}\,(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + \mathrm{sen}\,\varphi \,.\, \mathbf{i} \wedge$$

definisce invece le isomerie mediante un vettore unitario $\mathbf{i}$ e un angolo φ, attraverso funzioni trascendenti (seno e coseno) e la « diade » $\mathrm{H}\,(\mathbf{i}, \mathbf{i})$.

([1]) *Spostamenti rigidi finiti*, « Rend. R. Acc. Lincei » Vol. XVI, S. VI, 2° Sem., fasc. 9, Nov. 1932-XI.

La formula di Cisotti permette invece di giungere alla seguente espressione affatto elementare

$$
(2) \qquad \mathrm{r}(\mathbf{u}) = 1 + \frac{2}{1 + \mathbf{u} \times \mathbf{u}} [(\mathbf{u} \wedge) + (\mathbf{u} \wedge)^2] = 1 + \frac{2}{1 + u^2} [(\mathbf{u} \wedge) + (\mathbf{u} \wedge)^2]
$$

che ad ogni vettore $\mathbf{u}$ fa corrispondere un'unica isomeria (con $I_3 \, \mathrm{r}(\mathbf{u}) = 1$: cioè una *rotazione*; le *antirotazioni* sono espresse da $-\mathrm{r}(\mathbf{u})$). Variando $\mathbf{u}$ nell'insieme dei vettori, si ottengono da tale forma — che si potrà chiamare *forma di Cisotti* — tutte le isomerie, tranne le rotazioni di 180° attorno a un asse qualunque $\mathbf{i}$, che corrispondono al caso limite $\mathbf{u} = u \, \mathbf{i}$ per $u \to \infty$. La relazione coll'espressione solita è data da

$$
\mathbf{u} = (\mathrm{tg} \, \frac{1}{2} \varphi) \, \mathbf{i} \, .
$$

Vedremo poi che questa forma si presta bene anche allo sviluppo di un effettivo algoritmo, assolutamente intrinseco.

2. — Per la dimostrazione, ricordiamo che proprietà caratteristica delle isomerie è di conservare i moduli:

$$
(3) \qquad \alpha \mathbf{x} \times \alpha \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{x} \; (^1),
$$

e la possiamo anche scrivere $(\alpha - 1) \mathbf{x} \times (\alpha + 1) \mathbf{x} = 0$, ossia, supposto $(\alpha + 1)$ non sia degenere,

$$
(4) \qquad (\alpha - 1)(\alpha + 1)^{-1} \mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0 \, .
$$

Tale relazione dice che $(\alpha - 1)(\alpha + 1)^{-1}$ è un'assiale, e cioè [2]

---

[1] Notoriamente equivalente alla $\alpha \mathbf{x} \times \alpha \mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, che pure applicheremo in seguito.

[2] Ciò nell'ordinario spazio a tre dimensioni. Nel caso generale di uno spazio a n dimensioni si può ricavare l'espressione

$$
(\alpha - 1)(\alpha + 1)^{-1} = \gamma \qquad \text{con } \gamma \text{ assiale}
$$

da cui

$$
\alpha = 2 (1 - \gamma)^{-1} - 1 \, .
$$

Tale formula esprime sotto forma assoluta il noto teorema di Cayley sui determinanti ortogonali (cfr. p. es. E. Pascal, *I determinanti*, Hoepli 1923, pag. 236 e segg.).

un'omografia della forma $\mathbf{u}\wedge$, tale cioè che:

$$(\alpha - 1)(\alpha + 1)^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{x};$$

ne scende

$$(\alpha - 1)\mathbf{x} = \mathbf{u}\wedge(\alpha + 1)\mathbf{x} = \mathbf{u}\wedge[(\alpha - 1)\mathbf{x} + 2\mathbf{x}]. \tag{5}$$

Applicando il lemma dimostrato dal Cisotti nel lavoro citato, secondo cui l'equazione vettoriale $\mathbf{x} = \mathbf{u}\wedge(\mathbf{x} + \mathbf{v})$ ha l'unica soluzione

$$\mathbf{x} = \frac{1}{1 + u^2}\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}), \tag{6}$$

si ricava (ponendovi $(\alpha - 1)\mathbf{x}$ al posto di $\mathbf{x}$, $2\mathbf{x}$ al posto di $\mathbf{v}$):

$$(\alpha - 1)\mathbf{x} = \frac{1}{1 + u^2}\mathbf{u}\wedge(2\mathbf{x} + \mathbf{u}\wedge 2\mathbf{x}) = \frac{2}{1 + u^2}[(\mathbf{u}\wedge) + (\mathbf{u}\wedge)^2]\mathbf{x},$$

$$\alpha\mathbf{x} = \mathbf{x} + \frac{2}{1 + u^2}[\mathbf{u}\wedge\mathbf{x} + \mathbf{u}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{x})] = \left\{1 + \frac{2}{1 + u^2}[(\mathbf{u}\wedge) + (\mathbf{u}\wedge)^2]\right\}\mathbf{x},$$

ossia la (1):

$$\alpha = \mathrm{r}(\mathbf{u}) = 1 + \frac{2}{1 + u^2}[(\mathbf{u}\wedge) + (\mathbf{u}\wedge)^2].$$

Notiamo subito che $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{u}$, ossia $\mathbf{u}$ è vettore unito per l'isomeria $\alpha = \mathrm{r}(\mathbf{u})$.

3. — Per la nota formula del doppio prodotto vettoriale, è

$$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{x}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{x})\mathbf{u} - (\mathbf{u}\times\mathbf{u})\mathbf{x} = [\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - u^2]\mathbf{x},$$

e si può quindi anche scrivere (ponendo $\mathbf{u} = u\mathbf{i}$)

$$\alpha = 1 + \frac{2}{1 + u^2}[(\mathbf{u}\wedge) + \mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - u^2] =$$

$$= \left(1 - \frac{2u^2}{1 + u^2}\right) + \frac{2u^2}{1 + u^2}\mathrm{H}(\mathrm{i},\mathrm{i}) + \frac{2u}{1 + u^2}(\mathrm{i}\wedge) =$$

$$= \cos\varphi + (1 - \cos\varphi)\mathrm{H}(\mathrm{i},\mathrm{i}) + \operatorname{sen}\varphi \,.\, \mathrm{i}\wedge = \mathrm{Rotor}(\varphi, \mathrm{i}),$$

che è la (1), ponendo

$$u = \mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi, \qquad \text{ossia } \varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,u;$$

si giunge così facilmente (più facilmente che per la via usuale, cfr. A. V. G., I, pp. 120-126 [1]) all'espressione solita, e appare anche, dal confronto, il significato di u. Si vede inoltre che l'espressione è generale, salvo il caso limite $\varphi = 2\pi$.

4. — Anzichè verificare queste conclusioni riconducendosi all'espressione usuale, si poteva dedurle direttamente.

Intanto si verifica subito che $\mathrm{r}(\mathbf{u})$ è sempre *rotazione* (trasforma una terna di vettori in una terna di uguale orientamento); dalla verifica diretta ci si può anche esimere osservando che ciò è vero per $u = 0$, caso in cui ci si riduce ad $\alpha = 1$, e che, essendo $\mathrm{r}(\mathbf{u}) = \mathrm{r}(u\,\mathbf{i})$ funzione continua e mai degenere di u, l'I_3 non può cambiare segno [2]. Nel caso considerato ($\alpha + 1$ non degenere), $\alpha = \mathrm{r}(\mathbf{u})$ è dunque sempre una rotazione, e precisamente una rotazione di un angolo $\alpha = 2 \operatorname{arctg} u$ intorno all'asse u. Infatti $\mathrm{r}(\mathbf{u})$ trasforma manifestamente $\mathbf{u}$ in sè stesso e ogni vettore $\mathbf{x}$ ortogonale ad $\mathbf{u}$ in un vettore ortogonale ad $\mathbf{u}$ ruotato di un angolo φ tale che

$$
(7) \qquad x^2 \cos\varphi = \alpha\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \left\{ \mathbf{x} + \frac{2}{1+u^2} [\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{x})] \right\} \times
$$

$$
\times\, \mathbf{x} = \left(1 - \frac{2u^2}{1+u^2}\right) x^2 = \frac{1-u^2}{1+u^2}\, x^2 ,
$$

e quindi $\varphi = 2 \operatorname{arctg} u$, $u = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$. L'angolo φ è così pienamente determinato, sotto la condizione $0 \leqq \varphi < \pi$, e non rimane che a determinare il *senso* della rotazione; la relazione seguente

$$
(8) \qquad \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} \times \alpha\mathbf{x} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} \times (\alpha\mathbf{x} - \mathbf{x}) =
$$

$$
= \frac{2}{1+u^2} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}) \times [\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{x})] = 2\, \frac{(\mathbf{u} \wedge \mathbf{x})^2}{1+u^2} > 0
$$

mostra che esso è sempre positivo, ossia che la terna $\mathbf{u}, \mathbf{x}, \alpha\mathbf{x}$ ha sempre lo stesso orientamento che $\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$.

---

(1) A. V. G. *Analisi Vettoriale Generale*, Bologna, ed. Zanichelli; vol. I. *Trasformazioni lineari* di Burali-Forti e Marcolongo.

(2) Se supponiamo di conoscere già la proprietà delle isomerie di avere $I_3 = \pm 1$, si può dire semplicemente che I_3 non può saltare da $+1$ a -1.

Supponiamo ora invece $(\alpha + 1)$ degenere, e distinguiamo due casi: o è degenere anche $(\alpha - 1)$ oppure no. Se $(\alpha - 1)$ non è degenere, il ragionamento precedente si applica a $\beta = -\alpha$, ed esiste un unico vettore $\mathbf{u}$ tale che $\beta = \mathrm{r}(\mathbf{u})$, ossia $\alpha = -\mathrm{r}(\mathbf{u})$. In tal caso α è *antirotazione* (rotazione seguita da cambiamento di segno). Rimane il caso in cui sono degeneri tanto $\alpha - 1$ che $\alpha + 1$: ciò vuol dire che esiste un vettore $\mathbf{a}$ tale che $(\alpha - 1)\mathbf{a} = 0$, ossia $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a}$, e un vettore $\mathbf{b}$ tale che $(\alpha + 1)\mathbf{b} = 0$, ossia $\alpha\mathbf{b} = -\mathbf{b}$; per un vettore $\mathbf{c}$ ortogonale ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ è necessariamente $\alpha\mathbf{c} = \pm\mathbf{c}$, dovendo $\alpha\mathbf{c}$ essere ortogonale ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ ($\alpha\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \alpha\mathbf{c} \times \alpha\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} = 0$, id. per $\alpha\mathbf{c} \times \mathbf{b}$), ossia parallelo a $\mathbf{c}$, ed inoltre avere lo stesso modulo di $\mathbf{c}$. Se $\alpha\mathbf{c} = -\mathbf{c}$, anche per tutti i vettori $\mathbf{x}$ complanari con $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, ossia ortogonali ad $\mathbf{a}$, è $\alpha\mathbf{x} = -\mathbf{x}$, e α rappresenta quindi una rotazione di 180° intorno ad $\mathbf{a}$. Si può esprimere $\alpha = 1 + 2(\mathbf{i}\wedge)^2$ ove $\mathbf{i}$ è uno indifferentemente dei due vettori unitari paralleli ad $\mathbf{a}$, ed è ovviamente $\alpha = \lim_{u\to\infty} \mathrm{r}(u\mathbf{i})$. Nel caso opposto, $\alpha\mathbf{c} = \mathbf{c}$, $\beta = -\alpha$ è per la stessa ragione una rotazione di 180° intorno a $\mathbf{b}$, e quindi α è del tipo

$$\alpha = -1 - 2(\mathbf{i}\wedge)^2 = -\lim_{u\to\infty} \mathrm{r}(u\mathbf{i}).$$

Il caso in cui nè $\alpha - 1$ nè $\alpha + 1$ sia degenere appare impossibile da quanto sopra; ciò era a priori ovvio perchè ogni omografia ammette almeno una direzione unita ($\alpha\mathbf{x} = k\mathbf{x}$), e nel caso di un'isomeria non può essere che $k = \pm 1$.

5. — Si noti che i nn. 2 e 4 contengono la completa discussione, classificazione e riduzione a forma canonica delle isomerie, mentre ciò occupa in A. V. G. sei pagine, pur facendo uso di nozioni e risultati meno elementari e di metodi non sempre assolutamente intrinseci (considerazione di una terna $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$).

Vedremo ora inoltre che la forma canonica di Cisotti ora introdotta si presta in modo facile e diretto a istituire un effettivo sistema di calcolo sulle isomerie, conducendo in particolare a un'espressione esplicita del *prodotto* di due isomerie.

6. — Se $\alpha = \mathrm{r}(\mathbf{u})$ è una rotazione, è ben noto che

(9) $$\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} \wedge \alpha\mathbf{y}:$$

infatti, ripetendo un ragionamento già svolto (n. 4),

$$\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \pm (\alpha\mathbf{x} \wedge \alpha\mathbf{y}),$$

ma nel caso delle rotazioni vale il segno + (segno — per le antirotazioni!), che vale manifestatamente per $u = 0$, e quindi sempre per continuità.

Poichè, se $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \neq 0$, ogni vettore può esprimersi come combinazione lineare della forma $p\mathbf{x} + q\mathbf{y} + r\mathbf{z}$, ove $\mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ (e ciò in modo unico), si ha come corollario (molto utile, come si vedrà) che una rotazione α è pienamente determinata dalla conoscenza di $\alpha\mathbf{x}$ e $\alpha\mathbf{y}$, essendo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due vettori particolari qualunque, purchè naturalmente non paralleli.

Facile e significativa è anche l'espressione dell'inversa di un'isomeria:

$$[\mathrm{r}(\mathbf{u})]^{-1} = \mathrm{r}(-\mathbf{u}) ; \tag{10}$$

ciò appare dal significato stesso, oppure si può ottenere calcolando

$$[\mathrm{r}(\mathbf{u})]^{-1} = \mathrm{Kr}(\mathbf{u}) = 1 + \frac{2}{1+u^2}[\mathrm{K}(\mathbf{u}\wedge) + \mathrm{K}(\mathbf{u}\wedge)^2] =$$
$$= 1 + \frac{2}{1+u^2}[(-\mathbf{u}\wedge) + (\mathbf{u}\wedge)^2] = \mathrm{r}(-\mathbf{u}).$$

7. — E veniamo al problema più interessante: la determinazione del prodotto di due isomerie. Si tratta, basandosi sulla forma di Cisotti, di determinare, dati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, il vettore $\mathbf{w}$ tale che

$$\mathrm{r}(\mathbf{w}) = \mathrm{r}(\mathbf{u})\,\mathrm{r}(\mathbf{v}),$$

tale cioè che la rotazione individuata da $\mathbf{w}$ abbia lo stesso effetto di quella individuata da $\mathbf{v}$ seguita da quella determinata da $\mathbf{u}$.

Dobbiamo dunque determinare $\mathbf{w}$ in modo che, qualunque sia $\mathbf{x}$,

$$\mathrm{r}(\mathbf{w})\,\mathbf{x} = \mathrm{r}(\mathbf{u})\,\mathrm{r}(\mathbf{v})\,\mathbf{x},$$

ma sappiamo che tale relazione sussiste necessariamente per $\mathbf{x}$ qualunque purchè si verifichi per $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ vettori particolari qualunque (non paralleli), ed, escludendo il caso (pressochè banale) in cui sono paralleli $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, possiamo prendere

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{b} = \mathrm{r}(-\mathbf{v})\,\mathbf{u}.$$

Questi due vettori non sono infatti paralleli tra loro che se lo sono $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e la loro scelta è comoda perchè si ottiene il sistema d'equazioni molto semplificato

$$\mathrm{r}(\mathbf{w})\,\mathbf{v} = \mathrm{r}(\mathbf{u})\,\mathbf{v}\,, \qquad \mathrm{r}(-\mathbf{w})\,\mathbf{u} = \mathrm{r}(-\mathbf{v})\,\mathbf{u}\,; \tag{11}$$

si ha infatti:

$$\mathrm{r}(\mathbf{w})\,\mathbf{v} = \mathrm{r}(\mathbf{u})\,\mathrm{r}(\mathbf{v})\,\mathbf{v} = \mathrm{r}(\mathbf{u})\mathbf{v}\,,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(-\mathbf{w})\,\mathbf{u} &= \mathrm{r}(-\mathbf{w})\,\mathrm{r}(\mathbf{u})\,\mathbf{u} = \mathrm{r}(-\mathbf{w})\,\mathrm{r}(\mathbf{u})\,\mathrm{r}(\mathbf{v})\,\mathrm{r}(-\mathbf{v})\,\mathbf{u} = \\ &= \mathrm{r}(-\mathbf{w})\,\mathrm{r}(\mathbf{w})\,\mathrm{r}(-\mathbf{v})\,\mathbf{u} = \mathrm{r}(-\mathbf{v})\,\mathbf{u}\,.\end{aligned}$$

Sviluppando le (11), eliminando il termine $\mathbf{v}$, rispettivamente $\mathbf{u}$, che compare in entrambi i membri rispettivamente nella prima e seconda equazione, e trascurando il fattor comune 2 si ha

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+w^2}[\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}+\mathbf{w}\wedge(\mathbf{w}\wedge\mathbf{v})] = \\ &= \frac{1}{1+u^2}[\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+\mathbf{u}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})] = \frac{1}{1+u^2}(\mathbf{z}+\mathbf{u}\wedge\mathbf{z}) \\ &\frac{1}{1+w^2}[-\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}+\mathbf{w}\wedge(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})] = \\ &= \frac{1}{1+v^2}[-\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}+\mathbf{v}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})] = \frac{1}{1+v^2}(\mathbf{z}-\mathbf{v}\wedge\mathbf{z})\end{aligned} \tag{12}$$

ove si ponga $\mathbf{z} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$.

Da tali relazioni è agevole ricavare $\mathbf{w}$: ne determineremo ordinatamente *direzione*, *verso* e *modulo*.

8. — Le (12) mostrano senz'altro, i primi membri avendo a fattor comune $\mathbf{w}$, che $\mathbf{w}$ è ortogonale tanto a $\mathbf{z}+\mathbf{u}\wedge\mathbf{z}$ che a $\mathbf{z}-\mathbf{u}\wedge\mathbf{z}$, esso è dunque parallelo a

$$(\mathbf{z}+\mathbf{u}\wedge\mathbf{z})\wedge(\mathbf{z}-\mathbf{v}\wedge\mathbf{z}), \tag{13}$$

e con ciò la direzione è determinata.

Si può però giungere a un'espressione più semplice: il vettore espresso dalla (13), e quindi $\mathbf{w}$, è parallelo infatti a

$$\mathbf{t} = \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{z}\,, \tag{14}$$

come si trova sviluppande la (13) o più semplicemente cercando i vettori $\mathbf{a}$ tali che $\mathbf{a}\times(\mathbf{z}+\mathbf{u}\wedge\mathbf{z}) = \mathbf{a}\times(\mathbf{z}-\mathbf{v}\wedge\mathbf{z}) = 0$

dopo aver posto $\mathbf{a} = p\mathbf{u} + q\mathbf{v} + r\mathbf{z}$. Si hanno le due equazioni lineari in p, q, r:

$$0 = (p\mathbf{u} + q\mathbf{v} + r\mathbf{z}) \times (\mathbf{z} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{z}) = r\mathbf{z} \times \mathbf{z} +$$
$$+ q\mathbf{v} \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{z} = r z^2 - q\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{z} = (r - q) z^2, \quad r = q;$$
$$0 = (p\mathbf{u} + q\mathbf{v} + r\mathbf{z}) \times (\mathbf{z} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{z}) = r\mathbf{z} \times \mathbf{z} -$$
$$- p\mathbf{u} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{z} = r z^2 - p\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{z} = (r - p) z^2, \quad r = p;$$

è quindi $p = q = r$, c. d. d.

9. — Il verso di $\mathbf{w}$ si determina ricordando la (8): si avrà precisamente lo stesso verso di $\mathbf{t} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{z}$ o quello opposto a seconda che sia positivo o negativo il prodotto misto

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{z}) \wedge \mathbf{v} \times \mathrm{r}(\mathbf{w})\, \mathbf{v},$$

ossia, come vedremo, a seconda che $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ sia minore o maggiore di 1.

Si ha

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{z}) \wedge \mathbf{v} \times \mathrm{r}(\mathbf{w})\, \mathbf{v} = (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{z}) \wedge \mathbf{v} \times \mathrm{r}(\mathbf{u})\, \mathbf{v} =$$
$$= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathrm{r}(\mathbf{u})\, \mathbf{v} + \mathbf{z} \wedge \mathbf{v} \times \mathrm{r}(\mathbf{u})\, \mathbf{v},$$

ma per la (8) è

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathrm{r}(\mathbf{u})\, \mathbf{v} = \frac{2}{1 + u^2} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = \frac{2 z^2}{1 + u^2},$$

mentre un noto sviluppo permette di calcolare

$$\mathbf{z} \wedge \mathbf{v} \times \mathrm{r}(\mathbf{u})\, \mathbf{v} = (\mathbf{z} \wedge \mathbf{v}) \times \left\{ \mathbf{v} + \frac{2}{1 + u^2} (\mathbf{z} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{z}) \right\} =$$
$$= \frac{2}{1 + u^2} (\mathbf{z} \wedge \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \wedge \mathbf{z}) = \frac{2}{1 + u^2} \begin{vmatrix} \mathbf{z} \times \mathbf{u} & \mathbf{z} \times \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{u} & \mathbf{v} \times \mathbf{z} \end{vmatrix} = - \frac{2 z^2}{1 + u^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

e quindi

$$(15) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{z}) \wedge \mathbf{v} \times \mathrm{r}(\mathbf{w})\, \mathbf{v} = \frac{2 z^2}{1 + u^2} (1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v}),$$

espressione che è positiva o negativa a seconda che $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è minore o maggiore di 1, c. d. d.

10. — Il modulo w di $\mathbf{w}$ si può evidentemente ricavare, ora che è nota la direzione $\mathbf{t} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{z}$ di $\mathbf{w}$, dalla (7).

Basta costruire un vettore $\mathbf{x}$ ortogonale a $\mathbf{w}$, ossia a $\mathbf{t}$, e lo si ottiene ad es. ponendo $\mathbf{x} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{v}$; allora detta formula dà

$$(16) \quad (\mathbf{t} \wedge \mathbf{v}) \times \mathrm{r}(\mathbf{w})(\mathbf{t} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{t} \wedge \mathbf{v})^2 \frac{1 - w^2}{1 + w^2} = z^2 (1 + v^2) \frac{1 - w^2}{1 + w^2}$$

perchè

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{z} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathbf{z} \wedge \mathbf{v},$$
$$(\mathbf{t} \wedge \mathbf{v})^2 = z^2 + z^2 v^2 = z^2 (1 + v^2).$$

Sviluppando il primo membro si ha d'altra parte

$$\mathrm{r}(\mathbf{w})(\mathbf{t} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{t} \wedge \mathrm{r}(\mathbf{w}) \mathbf{v} = \mathbf{t} \wedge \mathrm{r}(\mathbf{u}) \mathbf{v} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{v} +$$
$$+ \frac{2}{1 + u^2} \mathbf{t} \wedge [\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})] = \mathbf{t} \wedge \mathbf{v} + \frac{2}{1 + u^2} \mathbf{t} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{t}),$$

$$(17) \quad (\mathbf{t} \wedge \mathbf{v}) \times \mathrm{r}(\mathbf{w})(\mathbf{t} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{t} \wedge \mathbf{v})^2 +$$
$$+ \frac{2}{1 + u^2} (\mathbf{t} \wedge \mathbf{v}) \times \mathbf{t} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{t}) = z^2 (1 + v^2) - \frac{2 t^2 z^2}{1 + u^2}$$

perchè il prodotto misto è

$$(\mathbf{t} \wedge \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{u}) \times \mathbf{t} = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{t})\, \mathbf{t} \times \mathbf{t} = - t^2 (\mathbf{z} \times \mathbf{t}) = - t^2 z^2 .$$

Confrontando la (17) con la (16) risulta

$$(18) \quad \frac{1 - w^2}{1 + w^2} = 1 - 2 \frac{t}{(1 + u^2)(1 + v^2)} = 2 \frac{(1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v})^2}{(1 + u^2)(1 + v^2)} - 1$$

da cui

$$(19) \quad w = \frac{t}{\sqrt{(1 + u^2)(1 + v^2) - t^2}} = \frac{t}{| 1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v} |}$$

perchè

$$t^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 + \mathbf{z}^2 = (u^2 + v^2 + 2 \mathbf{u} \times \mathbf{v}) + [u^2 v^2 - (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^2] =$$
$$= (u^2 v^2 + u^2 + v^2 + 1) - (1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v})^2 = (1 + u^2)(1 + v^2) - (1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v})^2 .$$

11. — È quindi, in forma esplicita:

$$(20) \quad \boxed{\mathbf{w} = \frac{1}{1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v}} (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})} ;$$

si vede subito infatti che tale vettore ha direzione, verso e modulo voluti.

Tale formula vale poi, come si verifica immediatamente, anche nel caso trascurato di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ paralleli (naturalmente il termine $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ allora scompare e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ può essere sostituito con $u\,v$).

Volendo far comparire esplicitamente i moduli e i versori di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e ponendo quindi $\mathbf{u} = u\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = v\mathbf{j}$, si ha

$$\text{(21)} \qquad \mathbf{w} = \frac{1}{1 - u v\, \mathbf{i} \times \mathbf{j}} (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u v\, \mathbf{i} \wedge \mathbf{j})$$

che si semplifica a

$$\text{(22)} \qquad \mathbf{w} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u v\, \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

se $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono ortogonali ($\mathbf{i} \times \mathbf{j} = 0$, ossia $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$), mentre nel caso opposto si può scrivere

$$\text{(23)} \qquad \mathbf{w} = \frac{1}{\mathbf{i} \times \mathbf{j} - \frac{1}{u\,v}} \left(\frac{1}{v} \mathbf{i} + \frac{1}{u} \mathbf{j} + \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \right).$$

12. — L'espressione (23) mostra la continuità di $\mathbf{w}$ per u e v tendenti all'infinito, ed anche per u e v tendenti contemporaneamente all'infinito *in modo qualunque*; ne risulta che l'espressione trovata è valida in generale anche adoperando, con la medesima familiarità della geometria proiettiva, dei vettori *infiniti* (di direzione determinata, il senso essendo indifferente); è infatti

per $\mathbf{u} = \infty\, \mathbf{i}$:

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{\mathbf{i} \times \mathbf{j}} \left(\frac{1}{v} \mathbf{i} + \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \right) = -\frac{1}{\mathbf{i} \times \mathbf{v}} (\mathbf{i} + \mathbf{i} \wedge \mathbf{v}),$$

per $\mathbf{v} = \infty\, \mathbf{j}$:

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{\mathbf{i} \times \mathbf{j}} \left(\frac{1}{u} \mathbf{j} + \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \right) = -\frac{1}{\mathbf{u} \times \mathbf{j}} (\mathbf{j} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{j}),$$

per $\mathbf{u} = \infty\, \mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \infty\, \mathbf{j}$:

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{\mathbf{i} \times \mathbf{j}} \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}.$$

Nel caso $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = 0$, è analogamente, come mostra la (22):

per $\mathbf{u} = \infty\, \mathbf{i}$:

$$\mathbf{w} = \infty\, (\mathbf{i} + v\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \infty\, (\mathbf{i} + \mathbf{i} \wedge \mathbf{v}),$$

per $\mathbf{v} = \infty \mathbf{j}$:

$$\mathbf{w} = \infty (\mathbf{j} + u \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \infty (\mathbf{j} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{j}),$$

per $\mathbf{u} = \infty \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \infty \mathbf{j}$:

$$\mathbf{w} = \infty \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}.$$

13. — Se scriviamo per definizione

$$\mathbf{u} \,\&\, \mathbf{v} = \mathbf{w} = \frac{1}{1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v}} (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \tag{24}$$

i risultati del n. precedente si possono esprimere sotto forma generale dicendo che $\mathbf{w}$ è funzione continua di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

$$\lim (\mathbf{u} \,\&\, \mathbf{v}) = (\lim \mathbf{u}) \,\&\, (\lim \mathbf{v}) \tag{25}$$

considerando la classe dei vettori come uno spazio tridimensionale *proiettivo*. Ciò si poteva dimostrare a priori con ragionamento topologico osservando che $r(\mathbf{u})$ è pure funzione continua di $\mathbf{u}$ nel campo proiettivo, che istituisce una corrispondenza biunivoca tra le rotazioni e uno spazio proiettivo; l'operazione $\mathbf{u} \,\&\, \mathbf{v}$, che è la trasformata dell'operazione, notoriamente continua, di prodotto funzionale, è essa pure continua (nel campo proiettivo).

14. — Vediamo qualche caso e problema particolare:

a) condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto di due rotazioni $r(\mathbf{u})$ ed $r(\mathbf{v})$ sia una rotazione di 180° è $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 1$;

b) condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto di due rotazioni sia invertibile, $\mathbf{u} \,\&\, \mathbf{v} = \mathbf{v} \,\&\, \mathbf{u}$, è che sia $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$, ossia $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{u}$ parallelo a $\mathbf{v}$;

c) condizione necessaria e sufficiente perchè invertendo l'ordine nel prodotto di due rotazioni si abbia la rotazione inversa: $r(\mathbf{u})\, r(\mathbf{v}) = [r(\mathbf{v})\, r(\mathbf{u})]^{-1}$, ossia $\mathbf{u} \,\&\, \mathbf{v} = - \mathbf{v} \,\&\, \mathbf{u}$, è (cfr. la (23)) che $u = v = \infty$ (ossia che si tratti del prodotto di due rotazioni di 180°);

d) in tale caso la rotazione risultante avviene secondo un asse ortogonale agli altri due, nel senso contrario alla regola del prodotto vettoriale, e di un angolo χ tale che (posto $\gamma = \operatorname{ang}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \chi = \left| \frac{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}}{\mathbf{i} \times \mathbf{j}} \right| = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\cos \gamma} = \operatorname{tg} \gamma,$$

ossia

$$\chi = 2\gamma \quad \left(\chi = 2\gamma - \pi \quad \text{se} \quad \gamma > \frac{\pi}{2}\right);$$

e) in genere è

$$(26) \quad \mathbf{v} \,\&\, \mathbf{u} = \frac{1}{1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v}} (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \,\&\, \mathbf{v} - \frac{2}{1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v};$$

f)

$$(27) \qquad (-\mathbf{u}) \,\&\, (-\mathbf{v}) = -(\mathbf{v} \,\&\, \mathbf{u});$$

g) si ha

$$(28) \qquad \mathbf{u} \,\&\, (-\mathbf{v}) = \frac{1}{1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}} (\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) =$$

$$= \frac{1}{1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}} [2\mathbf{u} - (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})] = \frac{2\mathbf{u}}{1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}} - \frac{1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v}}{1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}} (\mathbf{u} \,\&\, \mathbf{v})$$

e analogamente

$$(29) \qquad (-\mathbf{u}) \,\&\, \mathbf{v} = \frac{2\mathbf{v}}{1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}} - \frac{1 - \mathbf{u} \times \mathbf{v}}{1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}} (\mathbf{u} \,\&\, \mathbf{v}).$$

15. — Volendo individuare la rotazione risultante, anzichè con relazioni vettoriali, mediante relazioni angolari, si indichino con

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} u, \quad \psi = 2 \operatorname{arctg} v, \quad \gamma = \operatorname{ang}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{u\, v}$$

gli elementi noti e si cerchi di esprimere mediante essi i tre parametri $\chi = 2 \operatorname{arctg} w$, $\vartheta =$ angolo dell'asse $\mathbf{w}$ della rotazione risultante col piano degli assi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, $\theta =$ angolo formato coll'asse $\mathbf{u}$ dalla proiezione normale dell'asse $\mathbf{w}$ sul piano di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$; tali parametri, tenuto conto di osservazioni sui *versi* in cui gli angoli vanno presi, individuano completamente la rotazione risultante.

Si ha

$$(30) \quad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2}{u^2 (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\psi \,.\, \operatorname{sen}^2 \gamma}{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\psi + 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2}\psi \,.\, \cos\gamma}$$

$$(31) \quad \operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2}{(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi \,.\, \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\psi \,.\, \operatorname{sen}^2 \gamma}{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\psi + 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2}\psi \,.\, \cos\gamma} = \operatorname{sen}^2 \theta \,.\, \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi,$$

$$(32) \qquad \cos\chi = \frac{1-w^2}{1+w^2} = 2\,\frac{(1-\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2}{(1+u^2)\,(1+v^2)} - 1 =$$

$$= 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\,.\,\cos^2\frac{\psi}{2}\,.\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\,.\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi\,.\,\cos\gamma\right)^2 - 1\,.$$

Le relazioni circa i *sensi* degli angoli sono: θ è contato nello stesso senso di γ, perchè la proiezione di $\mathbf{w}$ è sempre compresa nell'angolo concavo tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$; ϑ è contato nel piano normale passante per la proiezione $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ di $\mathbf{w}$ nel senso dall'intersezione $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ verso la normale $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, orientata conformemente alla regola del prodotto vettoriale; la rotazione di un angolo χ avviene in senso positivo o negativo rispetto all'asse supposto orientato nel verso formante angolo acuto con $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ a seconda che è minore o maggiore di 1 il prodotto scalare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Volendo le componenti di $\mathbf{w}$ in forma cartesiana, si ottiene

$$(33) \qquad w_x = \frac{u_x + v_x + (u_y\,v_z - u_z\,v_y)}{1-(u_x\,v_x + u_y\,v_y + u_z\,v_z)}\,,$$

w_y e w_z analoghe permutando circolarmente x, y, z.

La complicazione e l'oscurità delle espressioni (30)-(33) forma un singolare contrasto con la semplicità e immediatezza delle espressioni vettoriali.

16. — Applichiamo le precedenti considerazioni allo studio di spostamenti rigidi, riprendendo la trattazione del Cisotti che sarà completata e anche resa, in qualche punto, più rigorosa.

Consideriamo la trasformazione che porta un punto generico P nel punto $P' = f(P)$; si dice per definizione che la trasformazione è *rigida* se

a) conserva le *distanze*, e cioè, essendo P e Q punti qualunque, si ha

$$[f(P) - f(Q)]^2 = (P-Q)^2,$$

o semplicemente

$$(P'-Q')^2 = (P-Q)^2;$$

b) appartiene a un insieme continuo di *trasformazioni rigide* (¹) che contiene l'identità.

Lemma. Una trasformazione rigida trasforma vettori uguali in vettori uguali: cioè,

$$\text{se} \quad P - Q = R - S, \qquad \text{è} \quad P' - Q' = R' - S'.$$

Dimostrazione. Dati quattro punti qualunque P, Q, R, S, diciamo M il punto medio del segmento $\overline{PS}$, N il punto medio del segmento $\overline{QR}$; si ha

$$2(M - N) = (P - Q) - (R - S),$$

$$(34) \quad 4(M - N)^2 = (P - Q)^2 + (R - S)^2 - 2(P - Q) \times (R - S) = (^2)$$
$$= (P - Q)^2 + (R - S)^2 + (R - P)^2 + (S - Q)^2 - (R - Q)^2 - (S - P)^2.$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè $P - Q = R - S$ è notoriamente $M - N = 0$, ma la (34) mostra che tale relazione può esprimersi mediante le sei distanze fra i quattro punti, ed è quindi invariante nelle trasformazioni rigide (³).

(¹) Ciò è necessario per escludere gli specchiamenti; è ovvio poi il senso in cui è usato il termine « trasformazioni rigide » nella seconda condizione, e che è « trasformazioni che soddisfano la condizione *a*), e quindi, in forza della *b*) stessa, anche la *b*) ». Per curiosità osserviamo che, senza tale precisazione, si ha, a rigore, un circolo vizioso, e si potrebbero considerare trasformazioni rigide solo quelle di un comunque prefissato insieme continuo contenente l'identità.

(²) Si ha infatti l'identità

$$2(B - A) \times (D - C) = (D - A)^2 + (C - B)^2 - (D - B)^2 - (C - A)^2,$$

come si verifica nel modo più facile ponendo

$$D - C = \mathbf{x}, \quad C - B = \mathbf{y}, \quad B - A = \mathbf{z},$$

con che

$$D - B = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad C - A = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad D - A = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z},$$

e sviluppando.

(³) Si poteva anche dare la seguente dimostrazione sintetica: detto M′ il punto medio del segmento $\overline{P'S'}$, si vede subito che M non può esser portato che in M′, unico punto che dista sia da P′ che da S′ la metà della distanza da P′ a S′. Analogamente N è portato in N′, e, se N = M, N′ = M′.

17. — Da tale lemma scende che esiste un operatore α che trasforma vettori in vettori, tale che (P, Q punti qualunque)

$$P' - Q' = \alpha (P - Q);$$

è facile vedere che α è una rotazione.

Intanto è un'omografia perchè

$$\alpha (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}, \quad \alpha (m \mathbf{x}) = m \alpha \mathbf{x}.$$

Infatti, essendo P, Q, A, punti qualunque

$$\alpha (P - Q) = P' - Q' = (P' - A') + (A' - Q') = \alpha (P - A) + \alpha (A - Q);$$

se m è razionale scende anche $\alpha [m (P - Q)] = m \alpha (P - Q)$, se m è irrazionale, ed $m - \varepsilon$ razionale, si ha

$$\alpha [m (P - Q)] = (m - \varepsilon) \alpha (P - Q) + \alpha [\varepsilon (P - Q)] = m \alpha (P - Q) + \mathbf{d}$$

con

$$\mathbf{d} = \alpha [\varepsilon (P - Q)] - \varepsilon \alpha (P - Q)$$

$$|\mathbf{d}| \leq |\alpha [\varepsilon (P - Q)]| + |\varepsilon \alpha (P - Q)| = 2 \varepsilon | P - Q |, \quad \text{ossia } \mathbf{d} = 0,$$

potendo essere ε piccolo a piacere.

È poi isomeria dovendo essere

$$[\alpha (P - Q)]^2 = (P' - Q')^2 = (P - Q)^2,$$

e precisamente rotazione perchè $r(\mathbf{u}) = r(u \mathbf{i})$ è funzione continua di u che si riduce all'identità per $u = 0$, mentre a $-r(\mathbf{u})$ non si può giungere con continuità (per l'osservazione fatta circa l'impossibilità di passare da $I_3 = +1$ a $I_3 = -1$).

Rimane così provato che per la più generale trasformazione rigida esiste un vettore $\mathbf{u}$ tale che

$$P' - Q' = r(\mathbf{u}) (P - Q); \tag{35}$$

essendo O un punto qualunque scende che è

$$P' = O' + r(\mathbf{u}) (P - O). \tag{36}$$

18. — Se $u = 0$, si ha una traslazione: è $P' = P + \mathbf{a}$, con $\mathbf{a}$ vettore (costante).

Se $\mathbf{u} = u \mathbf{i} \neq 0$ si ha

$$(P' - P) \times \mathbf{i} = (O' - O) \times \mathbf{i} = a = \text{costante (positiva nulla o negativa)}. \tag{37}$$

Infatti

$$(\mathrm{P}'-\mathrm{P})\times\mathbf{u}-(\mathrm{O}'-\mathrm{O})\times\mathbf{u}=(\mathrm{P}'-\mathrm{O}')\times\mathbf{u}-(\mathrm{P}-\mathrm{O})\times\mathbf{u}=$$

$$=\mathbf{u}\times[\mathrm{r}(\mathbf{u})-1](\mathrm{P}-\mathrm{O})=\frac{2}{1+u^2}\,\mathbf{u}\times\mathbf{u}\wedge[(1+\mathbf{u}\wedge)(\mathrm{P}-\mathrm{O})]=0\,.$$

Se esistono dei punti che si spostano parallelamente ad $\mathbf{u}$, si ha quindi per essi $\mathrm{P}'-\mathrm{P}=a\,\mathbf{i}$. Vedremo che esiste sempre un'unica retta s parallela ad $\mathbf{u}$, i cui punti sono tutti e soli quelli che soddisfano tale relazione.

Supponendo definito lo spostamento dando O' ed $\mathbf{u}$ l'equazione $\mathrm{P}'-\mathrm{P}=a\,\mathbf{i}$ si scrive

$$\mathrm{O}'+\mathrm{r}(\mathbf{u})(\mathrm{P}-\mathrm{O})-\mathrm{P}=a\,\mathbf{i}\,,\quad[\mathrm{r}(\mathbf{u})-1](\mathrm{P}-\mathrm{O})=a\,\mathbf{i}-(\mathrm{O}'-\mathrm{O})\,,$$

$$\frac{2}{1+u^2}\,u\,\mathbf{i}\wedge[(\mathrm{P}-\mathrm{O})+u\,\mathbf{i}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{O})]=a\,\mathbf{i}-(\mathrm{O}'-\mathrm{O})\,.$$

Poniamo $(\mathrm{O}'-\mathrm{O})-a\,\mathbf{i}=\mathbf{h}$ (per la (37), $\mathbf{h}$ è il componente dello spostamento $\mathrm{O}'-\mathrm{O}$ secondo il piano normale ad $\mathbf{u}$), e scriviamo $\mathrm{P}-\mathrm{O}=p\,\mathbf{h}+q\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{h}+r\,\mathbf{i}$; l'equazione diviene

$$\frac{2u}{1+u^2}\,\mathbf{i}\wedge(p\,\mathbf{h}+q\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{h})+\frac{2u^2}{1+u^2}(\mathbf{i}\wedge)^2(p\,\mathbf{h}+q\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{h})=-\mathbf{h}\,.$$

Ma

$$(\mathbf{i}\wedge)^2\,\mathbf{h}=-\mathbf{h}\,,\qquad(\mathbf{i}\wedge)^3\,\mathbf{h}=-\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{h}\,,$$

e quindi

$$\frac{2u}{1+u^2}(p\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{h}-q\,\mathbf{h})+\frac{2u^2}{1+u^2}(-p\,\mathbf{h}-q\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{h})=-\mathbf{h}$$

ossia

$$\mathbf{h}\left\{1-\frac{2u}{1+u^2}\,q-\frac{2u^2}{1+u^2}\,p\right\}+\mathbf{i}\wedge\mathbf{h}\left\{\frac{2u}{1+u^2}\,p-\frac{2u^2}{1+u^2}\,q\right\}=0\,.$$

Il secondo termine dà $p=u\,q$, il primo sostituendo

$$1+u^2-2u\,q+2u^3\,q=1+u^2-2u\,(1+u^2)\,q=0\,,\qquad q=\frac{1}{2u}\,,\qquad p=1/2\,.$$

Come si vede, r è indeterminato; risolvono il problema tutti e soli i punti P del tipo

$$\mathrm{P}-\mathrm{O}=\frac{1}{2}(\mathbf{h}+u\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{h})+r\,\mathbf{i}=\frac{1}{2}(\mathbf{h}+\mathbf{u}\wedge\mathbf{h})+r\,\mathbf{i}$$

con r qualsiasi, o anche, essendo

$$(1 + \mathbf{u} \wedge)(O' - O) = (1 + \mathbf{u} \wedge)\mathbf{h} + a\mathbf{i},$$

i punti $P = P_0 + r\mathbf{i}$ con

$$P_0 = O + \frac{1}{2}(1 + \mathbf{u} \wedge)(O' - O). \tag{38}$$

Essi costituiscono una retta, che si dice *asse* della trasformazione.

19. — Prendendo O sull'asse, è $O' = O + a\mathbf{i}$, e la (36) si scrive (forma normale)

$$P' = O + a\mathbf{i} + \mathrm{r}(u\mathbf{i})(P - O). \tag{39}$$

Se in particolare $a = 0$ si ha una semplice rotazione, e i punti dell'asse restano fermi.

20. — Se si hanno due trasformazioni rigide, la prima che trasforma P in P':

$$P' = O_1 + b\mathbf{j} + \mathrm{r}(v\mathbf{j})(P - O_1)$$

e la seconda che trasforma P' in P'':

$$P'' = O_2 + a\mathbf{i} + \mathrm{r}(u\mathbf{i})(P' - O_2),$$

l'espressione di P'' in funzione di P, che dà la composizione dei due movimenti, è

$$\begin{aligned} P'' &= O_2 + a\mathbf{i} + \mathrm{r}(u\mathbf{i})[b\mathbf{j} + \mathrm{r}(v\mathbf{j})(P - O_1) + (O_1 - O_2)] = \\ &= O_2 + a\mathbf{i} + \mathrm{r}(u\mathbf{i})[b\mathbf{j} + (O_1 - O_2)] + \mathrm{r}(u\mathbf{i})\,\mathrm{r}(v\mathbf{j})(P - O_1) = \\ &= O_1 + a\mathbf{i} + b\,\mathrm{r}(u\mathbf{i})\mathbf{j} + [\mathrm{r}(u\mathbf{i}) - 1](O_1 - O_2) + \mathrm{r}(u\mathbf{i})\,\mathrm{r}(v\mathbf{j})(P - O_1). \end{aligned} \tag{40}$$

Questa formula mostra che la rotazione è, come del resto era ovvio, il prodotto delle due rotazioni, ma la componente traslativa e l'asse s della trasformazione risultante dipendono dagli elementi dei due movimenti in modo meno semplice.

Li si può tuttavia esprimere subito in forma esplicita: posto $\mathbf{w} = \mathbf{u} \,\&\, \mathbf{v} = w\mathbf{k}$ (1) lo scalare

(1) Con $\mathbf{k}$ unitario, e $w = \pm \mid \mathbf{w} \mid$, a seconda che $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \lesseqgtr 1$ (se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 1$, $w = \infty$, e il verso di $\mathbf{k}$ è indifferentemente l'uno o l'altro).

$$c = (P'' - P) \times \mathbf{k} = (O''_1 - O_1) \times \mathbf{k} \tag{41}$$

e il punto

$$O = O_1 + \frac{1}{2}(1 + \mathbf{w} \wedge)(O''_1 - O_1) \tag{42}$$

sono la componente traslativa e un punto dell'asse, di modo che si ha, sotto forma normale

$$P'' = O + c\,\mathbf{k} + r(w\,\mathbf{k})(P - O)\,. \tag{43}$$

L'esame delle (41) e (42), tenendo presente la (40), consente uno studio completo della composizione di moti rigidi; se si considerano come parametri variabili a e b, fissi restando tutti gli altri elementi, l'asse s percorre tutto il fascio delle rette parallele a $\mathbf{w}$, ed esistono quindi ∞^1 combinazioni a, b, definite da un'equazione lineare $A a + B b = K$, per cui l'asse s si appoggia all'asse s_1 del primo movimento, e un'infinità per cui si appoggia ad s_2, mentre per un'unica combinazione, soddisfacente entrambe le condizioni, s si appoggia ad s_1 e s_2. Lo scalare c dipende solo dall'asse s, ed è funzione lineare; le combinazioni a, b per cui $c = 0$ (per le quali cioè la trasformazione risultante è una pura rotazione, e l'asse s è fisso) sono ancora una semplice infinità, definita da un'equazione lineare.

Ciò naturalmente per assi non paralleli; il caso di assi paralleli è banale, componendosi separatamente le due rotazioni e traslazioni parallele, e l'asse s essendo quindi indipendende da a e b.

Trieste, 8 ottobre 1933, XI.