CURVE TIPICHE IPEROSCULTATRICI

In: « *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* », 1930, n. 1, pp. 3-8.

BRUNO DE FINETTI

CURVE TIPICHE IPEROSCULATRICI

BOLOGNA
COOP. TIPOGRAFICA AZZOGUIDI
1930

Estratto dal *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*
Anno IX - N. 1 - Febbraio 1930
Edito dalla Casa Editrice NICOLA ZANICHELLI, Bologna

Sunto. - *Si definisce una spezzata, la* spezzata indicatrice *di una curva* l *in un punto* P, *tale che la conoscenza dei suoi primi* n *segmenti caratterizza la* l *in un intorno d'ordine* n + 1 *di* P, *e si determina una curva notevolmente semplice che ha un contatto d'ordine* n + 1 *colla* l *in* P.

Per caratterizzare in modo semplice e intuitivo un intorno del 1° o 2° ordine di una curva (e ci limiteremo, per semplicità, al caso delle curve piane), basta darne la tangente e rispettivamente il cerchio osculatore. In generale, un intorno d'ordine n è caratterizzato assegnando una qualunque curva che abbia colla curva data un contatto d'ordine n (almeno): il problema che può interessare (1) consiste perciò soltanto nell'eseguire in modo conveniente, e cioè semplice e significativo, una tale scelta largamente arbitraria. Scopo di questa nota è di indicare una via che generalizza — e, mi sembra, nel modo più spontaneo — il concetto che conduce a considerare il cerchio osculatore.

1. Sia data una curva piana l_0, e indichiamo con l_1 l'evoluta di l_0, con l_2 l'evoluta dell'evoluta di l_0, ossia l'evoluta di l_1, e, in generale, con l_{n+1} l'evoluta di l_n. Diremo *corrispondenti* i punti $P_0 P_1 \ldots P_n \ldots$ appartenenti rispettivamente ad $l_0 l_1 \ldots l_n \ldots$ se P_1 è il centro di curvatura di l_0 in P_0, P_2 è il centro di curvatura di l_1 in P_1, e, in generale, P_{n+1} è il centro di curvatura di l_n in P_n.

(1) Me ne sono interessato in seguito a delle interessanti osservazioni del prof. LEVI-CIVITA, nella discussione seguita alla Conferenza del prof. BOMPIANI al Seminario Matematico di Roma, seduta del 14 dicembre 1929 (anno VIII).

Osserviamo poi che per conoscere il punto P_1 di l_1 corrispondente a P_0 è necessario e sufficiente conoscere l_0 in un intorno di 2° ordine del punto P_0, e che per conoscere l_1 in un intorno d'ordine n di P_1 è necessario e sufficiente conoscere l_0 in un intorno d'ordine $n+1$ di P_0 (¹).

Ne consegue che, per conoscere la curva l_0 in un intorno d'ordine n di P_0 ($n \geq 2$) è necessario e sufficiente conoscere i primi $n-1$ punti corrispondenti $P_1 P_2 \dots P_{n-1}$. La spezzata $P_0 P_1 P_2 \dots P_{n-1}$ ha i segmenti successivi ortogonali (²) e per determinarla occorrono effettivamente, dato P_0, n parametri. Ciò che è conforme al nostro asserto.

Diremo *spezzata indicatrice* della curva l_0 nel punto P_0 la spezzata $P_0 P_1 P_2 \dots P_n \dots$; la conoscenza dei primi n segmenti della spezzata indicatrice caratterizza dunque completamente la curva l_0 in un intorno d'ordine $n+1$ del punto P_0.

2. Perchè una curva abbia in P_0 un contatto del 2° ordine (almeno) con l_0, è necessario e sufficiente che abbia comune con essa il centro di curvatura, ossia il primo segmento della spezzata indicatrice. Tutte le curve che hanno in P_0 un contatto del 2° ordine con l_0 si ottengono quindi prendendo ad arbitrio una curva λ_1 tangente in P_1 a $P_0 P_1$, e tracciandone l'evolvente λ_0 che passa per P_0. Il caso più semplice si ha quando l'evoluta λ_1 si riduce al punto P_1; allora λ_0 è una circonferenza, e cioè il *cerchio osculatore.*

Ragionando analogamente per il caso generale, in cui si voglia considerare un intorno d'ordine n qualunque, si vede che tutte le curve λ_0 che hanno in P_0 un contatto d'ordine n con l_0 si ottengono prendendo ad arbitrio una curva λ_{n-1} tangente in P_{n-1} a $P_{n-1} P_{n-2}$, e tracciando successivamente l'evolvente λ_{n-2} di λ_{n-1} che passa per P_{n-2}, l'evolvente λ_{n-3} di λ_{n-2} che passa per P_{n-3}, e così via fino ad ottenere λ_0, evolvente di λ_1 passante per P_0. Il caso più semplice si avrà quando λ_{n-1} si riduce a un punto, ossia a P_{n-1}. Allora λ_{n-2} sarà una circonferenza (evolvente prima d'un punto), λ_{n-3} un'evolvente di circonferenza (evolvente seconda d'un punto), ..., e infine λ_0 un'evolvente $(n-2)^{esima}$ di circonferenza (evolvente $(n-1)^{esima}$ d'un punto). Questa curva, scelta con un criterio che è l'estensione pura e semplice del criterio che conduce

(¹) Conoscendo l_0 in un intorno di 2° ordine di P_0 non rimane determinato soltanto P_1 ma rimane determinata l_1 in un intorno di 1° ordine di P_1. La tangente di l_1 in P_1 è infatti la normale di l_0 in P_0, ossia la $P_0 P_1$.

(²) Cfr. la precedente nota in calce.

a considerare il cerchio osculatore, può scegliersi ben a ragione come curva *tipica* per caratterizzare la curva l_0 in un intorno d'ordine n del punto P_0.

3. Per trattare la questione in forma analitica, converrà ricorrere alla rappresentazione intrinseca. Sia s l'arco di l_0 contato in un senso scelto ad arbitrio, e a partire, per semplicità, dal punto P_0, in un intorno del quale vogliamo studiare il comportamento della linea. Sia $\gamma(s)$ l'angolo formato dalla tangente (verso positivo!) nel punto $P(s)$ quando lo si conti nel senso antiorario e a partire dalla tangente in $P(0) = P_0$. Il raggio r del cerchio osculatore risulta allora

$$r = \frac{ds}{d\gamma}$$

quando s'intenda d'attribuirgli il segno + o — a seconda che la curva è concava alla sinistra o alla destra di chi la percorra nel verso positivo.

Ma è noto che l'elemento d'arco $|ds_1|$ dell'evoluta l_1 non è che $|dr|$: l'arco di l_1 compreso fra due punti P_1 e Q_1 è cioè la differenza fra i raggi di curvatura di l_0 nei punti corrispondenti P_0 e Q_0 (purchè naturalmente la curvatura vi sia una funzione monotona). Potendo disporre ad arbitrio del verso positivo e d'una costante additiva arbitraria, porremo $s_1 = r$, e in generale, indicando s_n, r_n l'arco e il raggio di curvatura di l_n (e scriveremo per analogia $s = s_0$, $r = r_0$), si avrà

$$s_{n+1} = r_n.$$

L'angolo fra le tangenti in punti corrispondenti è uguale (le tangenti di l_{n+1} essendo le normali di l_n), e abbiamo quindi

$$r_n = \frac{ds_n}{d\gamma}$$

ossia

$$s_{n+1} = \frac{ds_n}{d\gamma} = \frac{d^n s_0}{d\gamma^n}.$$

Indicheremo con R_h il valore di r_h per $\gamma = 0$.

Scrivendo allora

$$s_0(\gamma) = \frac{ds_0}{d\gamma} \cdot \gamma + \frac{d^2 s_0}{d\gamma^2}\frac{\gamma^2}{2!} + \dots + \frac{d^n s_0}{d\gamma^n} \cdot \frac{\gamma^n}{n!} + \dots =$$
$$= R_0\gamma + R_1\frac{\gamma^2}{2!} + \dots + R_n\frac{\gamma^n}{n!} + \dots$$

si vede che l'equazione intrinseca dell' $(n-1)^{esima}$ evolvente d'un punto che ha in P_0 un contatto d'ordine n con l_0 ha l'equazione intrinseca (σ = arco, origine in P_0, senso coincidente con quello di l_0):

$$\sigma(\gamma) = R_0\gamma + R_1 \frac{\gamma^2}{2!} + \dots + R_{n-1} \frac{\gamma^n}{n!}.$$

Se si conosce la spezzata indicatrice, si osservi che $R_0, R_1, \dots, R_{n-1}$ sono le lunghezze dei successivi segmenti prese con segno uguale od opposto al precedente a seconda che il segmento si trova alla sinistra o alla destra del precedente (percorrendo la spezzata nel senso $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$).

Ad esempio, l'evolvente di circonferenza che ha in P_0 un contatto di 3° ordine con l_0 ha l'equazione

$$\sigma(\gamma) = R_0\gamma + R_1 \frac{\gamma^2}{2}$$

che si può scrivere nella forma solita [1] ponendo

$$\sigma_0 = -\frac{R_0^2}{2R_1}, \quad \gamma_0 = -\frac{R_0}{R_1},$$

così che

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{R_1}{2}(\gamma - \gamma_0)^2$$

da cui, indicando ρ il raggio di curvatura

$$\rho = \frac{d\sigma}{d\gamma} = R_1(\gamma - \gamma_0) = \sqrt{2R_1(\sigma - \sigma_0)}$$

ossia

$$\rho = \sqrt{2R_1\left(\sigma + \frac{R_0}{R_1}\right)}.$$

4. Si può osservare che, assegnata completamente la spezzata indicatrice di l_0 *in un sol punto* P_0, la linea l_0 è interamente determinata purchè l'arco debba risultare funzione analitica della direzione γ della tangente.

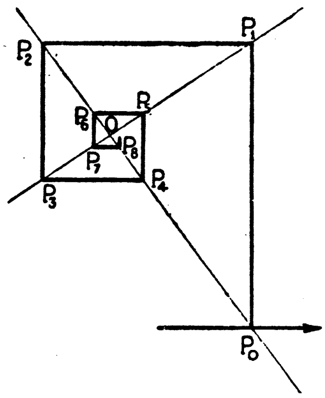
Se, ad esempio, la spezzata indicatrice in un punto P_0 si riduce a un quadrato (percorso indefinitamente nello stesso senso), la curva è una spirale logaritmica che fa un angolo di 45° col raggio vettore. Allora infatti

$$R_1 = R_2 = \dots = R_n = \dots = R, \quad s = R\left(\gamma + \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^3}{3!} + \dots\right) = Re^\gamma - R,$$

$$r = \frac{ds}{d\gamma} = Re^\gamma = s - c \qquad (c = -R).$$

[1] Per questa e le altre equazioni intrinseche di curve speciali, cfr. Cisotti, *Analisi Matematica*, p. 299 (dell'Ediz. Pavia, 1918).

In generale, la spirale logaritmica che fa col raggio vettore un angolo α ha l'equazione intrinseca $r = Ks$, ove $K = \cotg \alpha$, e per caratterizzarla basta il fatto che in un suo punto i lati della spezzata indicatrice formano una progressione geometrica: $R, KR, K^2R, \ldots$. La spezzata indicatrice ha la forma indicata dalla figura (P_n tende al punto asintotico della spirale, oppure all'infinito, a seconda che $|K| < 1$ o $|K| > 1$; per $K = 1$, e anche, in sostanza, per $K = -1$, si ha il caso precedente).



Per fare un altro esempio, consideriamo una curva che in un punto P_0 ha la spezzata indicatrice costituita da segmenti tutti uguali disposti a zig-zag. Avremo $R_0 R_1 R_2 \ldots R_n \ldots$ uguali a $\pm R$, essendovi alternativamente nella successione una permanenza di segno e una variazione, e cioè

$$R,\ R,\ -R,\ -R,\ R,\ R,\ -R,\ -R, \ldots$$

Risulta

$$s = R\left(\gamma + \frac{\gamma^2}{2!} - \frac{\gamma^3}{3!} - \frac{\gamma^4}{4!} + \frac{\gamma^5}{5!} + \frac{\gamma^6}{6!} - \frac{\gamma^7}{7!} - \frac{\gamma^8}{8!} + \ldots\right) =$$

$$= R\left(\gamma - \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\gamma^5}{5!} - \frac{\gamma^7}{7!} + \ldots\right) + R\left(\frac{\gamma^2}{2!} - \frac{\gamma^4}{4!} + \frac{\gamma^6}{6!} - \frac{\gamma^8}{8!} + \ldots\right) =$$

$$= R(\operatorname{sen}\gamma - \cos\gamma + 1)$$

$$r = \frac{ds}{d\gamma} = R(\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma)$$

e, posto $c = R$,

$$s - c = R(\operatorname{sen}\gamma - \cos\gamma)$$

$$r^2 + (s - c)^2 = 2R^2(\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma) = 2R^2.$$

La curva è la cicloide generata dal cerchio di diametro $\frac{R}{\sqrt{2}}$, e il punto P_0 è quello in cui la tangente è inclinata di 45° coll'asse di simmetria. Era del resto ovvio, per note proprietà della cicloide, che in tale punto la spezzata indicatrice ha la forma considerata, e, essendone l'equazione intrinseca sviluppabile in serie, che la cicloide è l'unica linea che goda di tale proprietà e abbia in un punto una simile spezzata indicatrice.

5. Per caratterizzare un intorno del 3° ordine d'una curva piana saremmo condotti, per la via indicata, a scegliere un'evolvente di circonferenza. Mostriamo però un altro metodo, che ha lo svantaggio di non prestarsi a generalizzazioni per intorni d' ordine n qualunque, ma che, nel caso particolare in cui $n = 3$, è indubbiamente più intuitivo e più interessante.

Una curva che ha un contatto di 3° ordine con l_0 nel punto P_0 è, come appare da quanto visto in un esempio precedente, la spirale logaritmica $r = R_0 + \frac{R_1}{R_0} s$. La figura precedente mostra quanto sia facile determinare il punto asintotico O della spirale logaritmica dati i due primi segmenti della spezzata indicatrice, ossia i tre punti $P_0 P_1 P_2$: O non è che il piede della normale calata da P_1 su $P_0 P_2$. Il rapporto $R_1 : R_0$, derivata del raggio di curvatura rispetto all' arco, è un *puro numero* che gode della proprietà di rimanere invariato per ogni trasformazione per similitudine. Esso caratterizza quindi completamente una curva in un intorno di 3° ordine, astrazion fatta dalla sua posizione e dalle sue dimensioni. Poichè rappresenta la variazione della curvatura, lo chiameremo *incurvatura*.

La spirale logaritmica è l' unica linea *a incurvatura costante*: ogni suo intorno di 3° ordine (e ogni arco finito) è sovrapponibile a tutti gli altri mediante una similitudine. L' unica linea a incurvatura nulla è il cerchio. In un puuto a incurvatara nulla, una linea è iperosculata del cerchio osculatore e inversamente. Il significato geometrico notevole e chiaro (inclinazione sul raggio vettore) che ha l' incurvatura nel caso della spirale logaritmica rende intuitiva d' un lato tale nozione e chiarisce insieme il concetto di spirale logaritmica iperosculatrice (1).

Roma, 20 dicembre 1929 (VIII).

(1) Il prof. LEVI-CIVITA mi ha fatto gentilmente cenno di alcuni punti della Memoria Sua e del FUBINI (in corso di stampa negli « Annali di Matematica ») cui queste mie ricerche si potrebbero ricollegare. E cioè uu' osservazione del BLASCHKE ispirata allo stesso concetto della mia *spezzata indicatrice*, e la *clotoide* del LEVI-CIVITA da riavvicinare alla mia *spirale logaritmica*.