

# LA PROBABILITA' : DISCUSSIONI SUI PRINCIPI

*Intervista di un redattore di Sapere  
col prof. Bruno de Finetti*

Fig. 1 Il prof. Bruno de Finetti.



**SAPERE:** Recentemente, e pressoché simultaneamente, sono apparsi in Italia la Sua « Teoria delle probabilità » (Einaudi, 1970) ed i « Fondamenti del Calcolo delle probabilità » (Feltrinelli, 1970) di Domenico Costantini, intesi a sostenere due concezioni molto diverse. Vorrebbe aiutarci a chiarire ai nostri lettori quale sia l'apporto di queste due opere e in cosa consista il dissenso?

**BRUNO de FINETTI:** Volentieri, purché sia chiaro che io sono parte in causa. Le informazioni che darò spero risulteranno obbiettive; i commenti però saranno ovviamente informati al mio punto di vista e il lettore dovrà esserne avvertito perché stia attento a vagliarli con la propria testa.

**S.:** Lo ha già avvertito Lei, comunque penserò anche io, all'occasione, se riuscirò, a fare l'avvocato del diavolo.

**BdF.:** Prima di entrare in argomento vorrei dire che il 1970 ha visto uscire in Italia non due, ma ben tre, libri impegnativi sulla probabilità. Il terzo è « Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica » (UTET, 1970) di Luciano Daboni, di orientamento soggettivistico ma inteso soprattutto, ed egregiamente, alla trattazione matematica (e piuttosto neutrale) dei principali argomenti e problemi. Non dà spunti per coinvolgerlo nella presente discussione, ma era doveroso menzionarlo.

**S.:** I primi due invece sono fortemente orientati verso una concezione e impostazione molto caratterizzate, è così?

**BdF.:** Sì, ma anche se hanno in comune l'aspetto che interessa **SAPERE**, e cioè quello di illustrare e difendere un preciso punto di vista in merito alla perenne diatriba sui fondamenti, i due libri hanno natura e struttura molto diverse.

**S.:** Diversa struttura... In che senso?

**BdF.:** Il libro di Costantini ha espressamente come argomento il confronto fra le diverse concezioni attraverso il pensiero dei principali autori. Tale confronto è sviluppato mediante l'analisi dell'evoluzione storica e della problematica attuale delle diverse interpretazioni. Ed è in seguito a ciò che, come conclusione, l'A. esprime la propria adesione alla concezione *logistica*, che trova preferibile.

Il mio libro, invece, intende sviluppare e presentare tutto (in certo senso) il calcolo delle probabilità secondo la concezione *soggettivista*. I motivi per cui sostengo tale concezione li ho già esposti ripetutamente (e un po' mi obbligherete ora a ripeterli anche Voi...); molte delle incomprensioni e obiezioni incontrate dipendono però dal pensare isolatamente a qualche singola affermazione o argomentazione, anziché collocarla nel tutto ove s'inquadra. Di qui la necessità di mostrare, come ho inteso col mio libro, che è possibile inquadrare tutto secondo il punto di vista *soggettivista*, e come ciò conduca a una visione organica, coerente, intrinsecamente completa, idonea indifferentemente a trattare tutti i casi in cui tale calcolo serve, e cioè tutto ciò che ap-

partiene al campo dell'incertezza. Solo incidentalmente ho incluso dei cenni ad altre concezioni e delle osservazioni critiche per controbatterle: in genere, più o meno le stesse che sono stato costretto a ribadire più e più volte. Tuttavia, ho anche aggiunto talora qualche completamento, collegato anche all'inclusione di alcuni argomenti nuovi che, con l'occasione, mi è sembrata opportuna o necessaria.

s.: Ho visto infatti, dalla dedica a Beniamino Segre, che ringrazia lui per aver insistito da tempo sulla necessità che Lei scrivesse un'esposizione completa al fine di chiarire un punto di vista e di provarne la validità. Ora, lo scopo sarà raggiunto?

ADF.: Non è così facile. Il libro è

riuscito molto più lungo di quanto desiderassi e immaginassi (tanto che all'ultimo ha dovuto esser rilegato in due volumi!). Anche se qualcuno riuscirà a leggerlo tutto attentamente, non è detto che se fa un'obiezione su un punto ricordi che d'essa risponde una controobiezione chissà in quale altro punto. E poi vi sono delle prevenzioni: c'è gente che si scandalizza al solo pensiero di accettare una nozione *soggettiva* (o anche solo a sentir profetire tale termine!) mentre è prontissima ad accettarla tale e quale od anche grossolanamente peggiorata pur di gabellarla per *oggettiva*. Roba da « caccia alle streghe »...

s.: Sì, ma bisognerà subito spiegare un po' quali siano le concezioni della

Del punto di vista cui si ispira la « Teoria della Probabilità » di de Finetti cercheremo di dare un'idea attraverso la presentazione di pochi passaggi caratteristici e significativi e di alcune figure che li illustrano.

La probabilità ha sempre un significato soggettivo: anche se valutata, in molti casi, coi consueti criteri basati su simmetrie e frequenze, essa diviene la probabilità, per un dato individuo, se ed in quanto egli la adotta, come propria opinione (sia pure accettando la validità, in quel caso, di quei criteri, senza sollevare dubbi sempre a priori leciti).

Perciò diviene essenziale in tale impostazione, lo studio di metodi per aiutare e obbligare un individuo a valutare consapevolmente ed esprimere sinceramente le proprie opinioni di probabilità. E allora (citiamo da pagina 212):

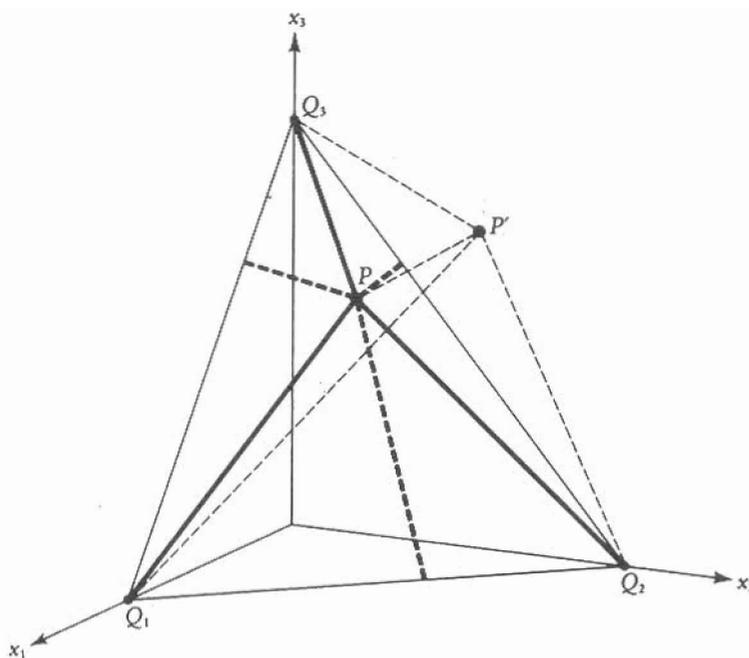
« Un primo aspetto è la necessità di acquisire il senso dei valori numerici. Vi sono molte persone che, per dire in quanto tempo si arriva a questo o quel luogo, rispondono "cinque minuti" oppure "un'ora" a seconda che è piuttosto vicino o piuttosto lontano, ignorando termini intermedi. Oppure uno può essere del tutto non familiare con una data scala, come un medico che, pur sapendo giudicare, toccando un ammalato, se ha la febbre, e più o meno alta, si troverebbe in difficoltà se dovesse comunicarla in scala a lui in-

Fig. 2.

consueta (per es. Fahrenheit mentre è abituato ai centigradi, o viceversa). Anche nei giudizi di probabilità v'è chi ignora i gradi intermedi qualificando di "quasi impossibile" ogni cosa che non gli sembra "quasi certa" oppure si limita ad aggiungere un "50-50" (fifty-fifty) o frasi analoghe quando non gli sembrano abbastanza certi né il SÌ né il NO.

Per eliminare siffatte deficienze occorre averne coscienza ed esercitarsi ».

Per « esercitarsi », si potrebbe pensare di proporre scommesse, ma, per evitare cause di distorsione facilmente immaginabili, conviene ricorrere a schemi analoghi ma più correttamente ispirati alla « teoria delle decisioni ». In sostanza si tratta di chiedere a un individuo di indicare il valore che attri-



probabilità, altrimenti, parlando di soggettivo, o logicista, o altro, il lettore non ci potrà seguire.

ndf.: Giustissimo. Cominciamo col dire che esistono diverse concezioni della probabilità, benché conducano tutte alla medesima teoria matematica delle probabilità, o calcolo delle probabilità (salvo qualche inezia).

Le tre correnti principali (prescindendo da innumerevoli sfumature) sono quella dei *soggettivisti* e quelle dei *logicisti* e dei *frequentisti* (detti, insieme, *oggettivisti*).

I logicisti partono dai casi tipo dadi ove le facce si giudicano ugualmente probabili per ragioni obbiettive (simmetria). I frequentisti partono da schemi statistici giudicando oggettive le

probabilità valutate in base a frequenze (percentuali di realizzazioni osservate su casi analoghi). Entrambi ammettono di considerare altri casi solo se riescono a ricondurli più o meno artificiosamente al loro schema preferito, fuori del quale parlare di probabilità per loro non ha senso (se non — come taluni consentono — per « vaga analogia »). Per i soggettivisti, al contrario, la nozione di probabilità va intesa conformemente al significato del termine nel linguaggio comune, ossia, concretamente, come possibile base per una scommessa. La nozione di probabilità, così intesa come grado di fiducia (o di credenza) nell'avverarsi di un evento (o, equivalentemente, nella verità di una proposizione) ha una validità del tutto generale. Essa è sempre sogget-

tiva, nel senso che esprime nient'altro che l'opinione di chi la valuta...

s.: Scusi, ma ora vorrei davvero fare l'avvocato del diavolo. Se così fosse ciascuno potrebbe valutare tutte le probabilità a caso senza osservare alcuna regola né tener conto di alcuna esperienza, e nessuna considerazione avrebbe alcun valore per nessun altro tranne per chi la fa...

ndf.: Accidenti! Anche il diavolo si mette a fare... la caccia alle streghe appena sente dire « soggettiva »...

Ma certamente, è verissimo; un uomo può anche scegliere le probabilità a caso, così come, se i genitori lo hanno (imprudentemente?) abituato fin da piccolo a andare in giro senza dande, potrà scegliere a caso che strada pren-

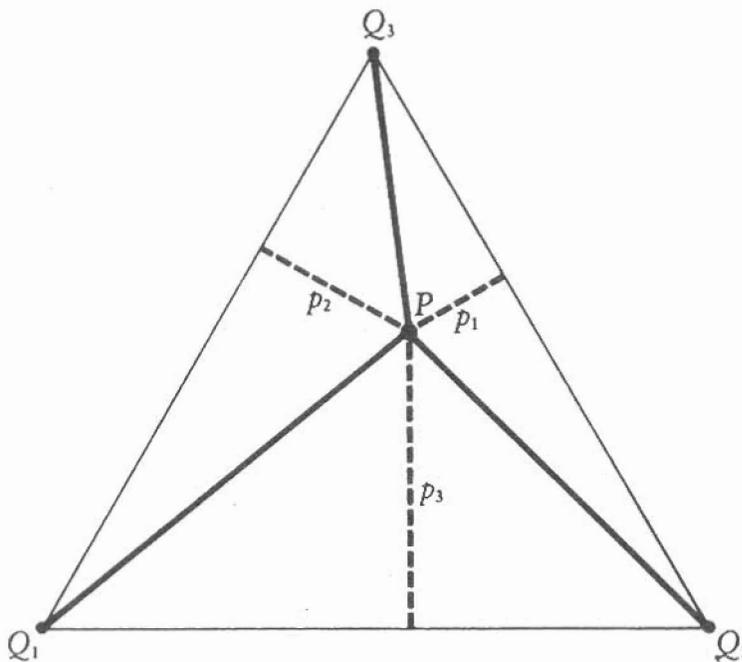


Fig. 3.

buisce alle probabilità di uno o più eventi, stabilendo che gli verrà inflitta una penalizzazione dipendente dalla sua valutazione e dall'esito degli eventi in questione. La regola di penalizzazione si sceglie in modo che ciascuno trovi vantaggioso esprimere correttamente la propria opinione (in tal modo minimizza la penalizzazione secondo la sua previsione).

I metodi più semplici sono quelli in cui la penalizzazione è commisurata al « quadrato della distanza » fra il punto-previsione che rappresenta la valutazione di probabilità e quello che rappresenta il risultato effettivo.

Così nella figura 2 il punto-previsione ( $P'$  oppure  $P$ ) ha per coordinate le probabilità  $x_1, x_2, x_3$  date da un individuo a tre eventi  $A, B, C$ , di una par-

tizione (di cui cioè se ne deve verificare uno e uno solo, come vittoria, pareggio o sconfitta, o 1-X-2, in una partita di calcio); il punto-risultato è  $Q_1$  (corrispondente a  $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$ ) se si verifica  $A$ , e così  $Q_2$  e  $Q_3$  se si verificano  $B$  o  $C$ . Le penalizzazioni sono date dai quadrati delle distanze, cioè di  $PA$ , di  $PB$ , di  $PC$ , ed è già intuitivo che conviene rendere piccole le distanze dei punti-risultato ritenuti più probabili (e si dimostra che ciò porta proprio a indicare come  $x_1, x_2, x_3$  i valori effettivamente dati alle probabilità).

Ma inoltre risulta automaticamente dimostrato che uno deve soddisfare il teorema delle probabilità totali (le probabilità dei tre casi devono dare come somma 1): se anziché un  $P$  con  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , cioè sul triangolo  $Q_1 Q_2 Q_3$ , si prendesse un  $P'$  fuori, tutte e tre le distanze e quindi le penalizzazioni, sarebbero maggiori che scegliendo  $P$  proiezione di  $P'$  sul triangolo. Questo fatto, esemplifica il modo come appaiono « condizioni oggettive di coerenza » obbligatorie per valutazioni soggettive (per chi non vuole danneggiarsi da sé).

Sul ruolo di tali limitazioni nell'imporre in pratica valutazioni in certo senso ragionevoli, ecco alcune osservazioni (citando da pag. 218):

« Le condizioni di coerenza, pur senza limitare in alcun modo di per sé la

dere, se percorrerla in piedi o carponi, se buttarsi sotto un autobus o giù da un ponte. Ma in genere nessuno fa così: anche se è libero di scegliere lo fa con criterio secondo opinioni e gusti suoi, e spesso opinioni e gusti sono vicini o coincidono per molte persone o tutte (pur non cessando di essere soggettivi benché la coincidenza sia per lo più indotta da circostanze oggettive).

s.: Ma insomma, un obbligo, allora, c'è sempre?

bdF.: Bisogna distinguere tra obbligo di seguire una ricetta prefabbricata e riflessione intesa a responsabilizzare la scelta lasciata libera...

s.: Preciso la domanda: nei casi dei dadi o delle frequenze il soggettivi-

sta deve accettare le definizioni degli oggettivisti?

bdF.: Non come definizioni, ma come criteri sì; però neppure come criteri standard da applicare automaticamente, bensì vagliando caso per caso se e fino a qual punto riescono convincenti.

Una percentuale di casi possibili o di successi (frequenza) è indubbiamente e *sempre* un dato obiettivo anche quando nessuno lo userebbe come probabilità. Ed è soltanto dopo aver riflettuto se tale valore, tale e quale o corretto in base ad altre informazioni o riflessioni, ci appare *idoneo come base per previsioni* in uno o più casi analoghi, che esso diventa (per chi così valuta) una *probabilità*. (E se così non fosse, che motivo ci sarebbe per introdurre

questo nuovo termine?).

s.: Già; ma ora mi sembra che si dovrebbe, prima di proseguire, chiarire come mai si abbia un unico calcolo delle probabilità pur partendo da concezioni tanto diverse. In particolare come possono esserci regole di calcolo per probabilità soggettive che si possono scegliere senza alcuna regola?

bdF.: Risiamo al punto di prima, ma è giusto perché occorre ripetere in forma matematica quel che prima è stato solo accennato discorsivamente.

I soggettivisti non impongono regole (come altri fa), fissandole come dogmi o come assiomi. Sta di fatto però che se uno non rispetta delle ovvie regole di *coerenza* può farsi rovinare da chi ne approfittasse obbligandolo a una op-

libertà nella valutazione di una qualunque probabilità, in pratica limitano molto la possibilità di valutazioni "stravaganti". Precisamente, risulta impossibile una valutazione stravagante isolata (così come avviene per un bugiardo che per sostenere una bugia deve costruirne tutta una serie, o per un progettista che, venendo cambiato un dato, deve alterare tutto il progetto). È facile dire "per me la probabilità di E è doppia di quel che, più o meno, ritengono gli altri"; però se Tu affermerai ciò potrò chiederti "ma allora, come valuti le probabilità di A, B, C,...?", e, avuta risposta, "dunque, per te, la probabilità di H è così piccola, un decimo di come si valuta comunemente?", e via dicendo. Se ti sentirai sempre sicuro della tua coerenza, avrai un'opinione concreta coerente che gli altri potranno dire "stravagante" (col medesimo diritto con cui Tu potrai dire stravagante l'opinione comune) ma non altrimenti trovare in difetto; più spesso però ti accorgerai che la valutazione stravagante iniziale ti mette in disaccordo non solo con gli altri ma anche con te stesso non appena affronti il problema in tutta la sua interezza e complessità con tutti i suoi addentellati.

La fig. 3 è la stessa fig. 2 in cui si consideri solo il triangolo  $Q_1 Q_2 Q_3$  dato che gli altri punti vanno esclusi

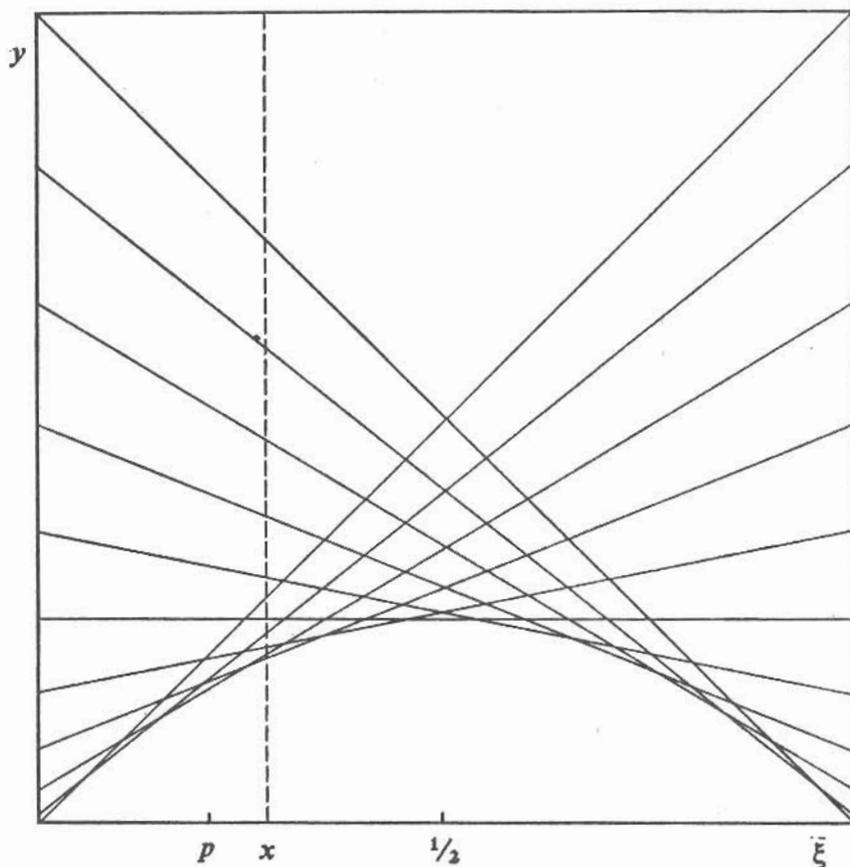


Fig. 4 Le rette corrispondono alle combinazioni di penalizzazione tra cui il metodo consente di scegliere. L'ordinata di una retta nel punto  $p$  è la previsione di penalizzazione per chi sceglie quella retta e attribuisce all'evento in questione la probabilità più piccola. In tal caso il minimo ottenibile è dato dall'ordinata della parabola e la scelta ottima è quella della tangente alla parabola in corrispondenza all'ascissa  $p$ .

portuna (per lui) combinazione di scommesse che il primo si è detto disposto ad accettare (con una parola di moda, lo può « incastrare »). E i soggettivisti avvertono: trasgredire tali regole espone a questo rischio...

s.: Come avvertire « Chi tocca i fili muore » anziché ingiungere che è vietato toccarli?

bdf.: Proprio così. Possiamo distinguere in tal modo un comportamento *razionale* o *irrazionale* a seconda che si bada o no a non cadere in siffatte incoerenze.

Quanto ai criteri basati su simmetrie e su frequenze, essi non hanno nulla a che fare con tale *razionalità*; è abbastanza spontaneo seguirli anche senza che uno vi abbia mai riflettuto, si pos-

sono addurre giustificazioni consistenti nel ricondursi ad altre ammissioni spontanee più elementari (\*), ma pur sempre accettabili o no da chiunque a seconda che gli sembrano o non sembrano valide, caso per caso.

Accettandole, uno può apparirci più o meno *ragionevole*, in un senso soggettivo (cioè esprimente l'opinione di chi lo giudica), e che comunque nulla ha a che fare col precedente senso di « razionale » (ossia con le regole rigide della coerenza). Ne dovremo riparlare con riferimento alle frequenze discutendo del « ragionamento induttivo ».

(\*) Senza entrare in dettagli, ciò dipende dall'ammissione di condizioni come la *scambiabilità* (accennata più avanti) od analoghe.

s.: E come mai le regole di coerenza valgono anche per gli oggettivisti, per i quali la probabilità non è una valutazione, e allora non si può neppure dirla coerente o no?

bdf.: È automatico: le percentuali di « casi favorevoli » su  $n$  possibili e di « successi » su  $n$  prove soddisfano necessariamente per ragioni aritmetiche quella proprietà di additività che è condizione di coerenza. Formalmente, non c'è alcuna contraddizione fra le tre impostazioni: si tratta solo di scegliere se sia preferibile una teoria unitaria che ingloba le altre come casi particolari (e... cum grano salis) o basarsi su l'uno o l'altro dei concetti particolari (da prendersi alla lettera, acriticamente), e poi arrangiarsi se non ci si contenta

per coerenza. La figura 4 illustra invece il modo in cui, variando la valutazione  $p$  della probabilità di un evento,  $E$ , si modificano le penalizzazioni nei due casi di risultato  $E$  e non- $E$ . Esse sono  $(1-p)^2$  e  $p^2$ ; nella figura sono le ordinate delle rette in  $x=0$  e  $x=1$ , la retta corrispondente a un dato  $p$  essendo quella tangente alla parabola involuppo nel punto di ascissa  $x=p$ . L'ordinata di una qualunque retta in  $x=p$  è la previsione (o "speranza matematica") di penalizza-

zione per chi attribuisca all'evento  $E$  una probabilità  $p$  ma indichi come suo valore  $x$  anziché  $p$ . È evidente dalla figura che così facendo egli si danneggia perché, in corrispondenza all'ascissa  $x=p$ , tutte le altre rette stanno al di sopra della parabola ad eccezione della tangente, che esprime la scelta  $x=p$ .

La figura 5 rappresenta l'analogo ragionamento per le probabilità subordinate. Senza entrare in dettagli, la figura 5 mostra che (si pensino i segmenti

marcati come fili elastici!) il punto  $x, y, z$  deve trovarsi sul piano per  $(x, 0, 0)$  e la diagonale  $(0, 1, 0) - (1, 1, 1)$ , ossia sul paraboloide  $z = xy$ . Ma, nella impostazione che conduce a detta figura,  $x$  è la probabilità del prodotto  $EH$  di due eventi  $E$  ed  $H$ , ed  $y$  e  $x$  quelle di  $H$  e di "E subordinatamente ad  $H$ "; quindi la relazione  $z = xy$  significa che, per la coerenza, deve venir soddisfatto il cosiddetto "teorema delle probabilità composte".

Altre due figure, prese invece dal se-

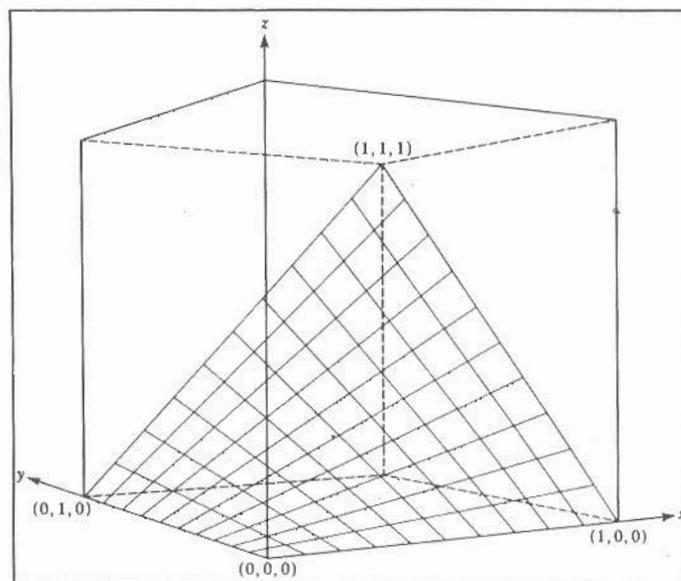
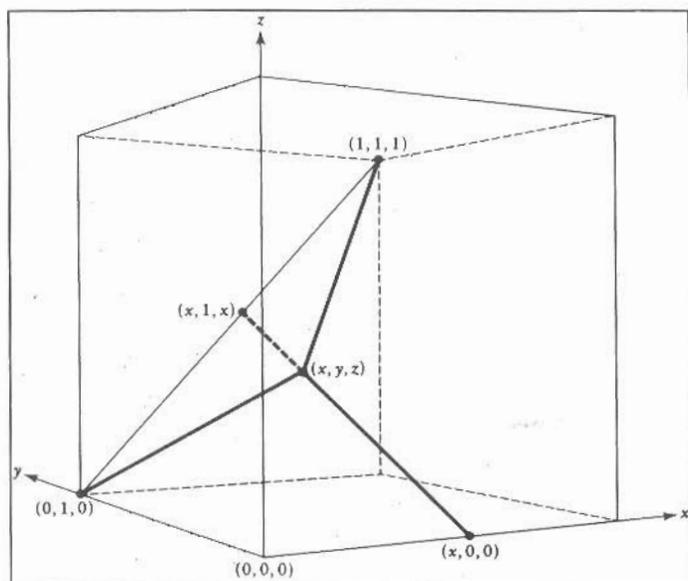


Fig. 5.

di rimanere reclusi definitivamente entro tale angusto steccato e isterilirvisi.

s.: Quali prospettive vi sono per una proficua prosecuzione delle discussioni in argomento?

bdf.: Io penso che, almeno riferendoci all'Italia, l'interesse per tali argomenti dovrebbe venir particolarmente ridestato e agevolato dal libro di Costantini. Egli vi presenta e discute in una sintesi molto efficace l'essenza e la storia delle diverse concezioni, riuscendo a rendere chiare le posizioni che spesso nelle opere originali dei singoli autori riescono difficili da individuare, separando il punto decisivo dalle pur necessarie disquisizioni e formalizzazioni esplicative. Lo dico perché io stesso ebbi questa lieta sorpresa, sia nel leg-

gere passi che mi rinfrescavano la memoria di cose già lette, e sia in altri concernenti invece cose per me nuove. Anche le considerazioni e prese di posizione personali dell'A. appaiono spesso meditate e giudiziose...

s.: Ma allora cosa ci sto a fare come moderatore, se non c'è ombra di dissenso?

bdf.: Eh, no: nonostante tutto ciò il dissenso esiste e si fa sentire frequentemente. In certo senso è anche radicale. Ma deriva da una sottile differenza di visuale che riaffiora sotto diverse sembianze in punti diversi, forse dovunque. Riaffiora a renderci sempre avvertiti che anche le cose su cui sembra si sia d'accordo, e dove uno può trovare che l'altro si è espresso esatta-

mente e felicemente, sono purtroppo vedute attraverso occhiali diversi (ed è facile indovinare che ciascuno di noi due giudicherà *deformanti* gli occhiali dell'altro).

Ma inoltre... c'è anche un fatto per me assolutamente inesplicabile...

s.: Un fatto inesplicabile? Sarà meglio allora sentire subito di che si tratta.

bdf.: Sarebbe prematuro. Si tratta, comunque, di questo: è sfuggita all'A. l'esistenza di una trattazione soggettivistica del ragionamento induttivo, che è parte essenziale della concezione soggettivistica, per cui non gli fu possibile discuterne appropriatamente.

Ho voluto menzionare ora il fatto per non stupire informandone a suo luogo

condo volume, riguardano argomenti particolari su cui si può far rilevare l'efficacia di ragionamenti svolti su appropriate rappresentazioni grafiche.

La figura 6 illustra il problema dello scrutinio: qual è la probabilità che il candidato che ha la maggioranza ( $H$  voti su  $N$ ,  $H > N/2$ ) sia risultato sempre in vantaggio durante lo spoglio? Nella figura, a ogni voto favorevole corrisponde un passo in su, e viceversa. Se il primo voto è sfavorevole, il che ha probabilità  $(N-H)/N$ , il "sempre in vantaggio" è escluso (vedi spezzata marcata). Ma gli altri casi sono altrettanti per cui la probabilità di sempre in vantaggio è  $1 - 2(N-H)/N = (2H-N)/N = Y/N$  ( $Y$  distlivello finale). Che siano altrettanti lo mostra la figura: ogni traiettoria come quella tratteggiata (e che continua poi con quella marcata) corrisponde a quella marcata per semplice riflessione speculare del tratto iniziale (fino al ritorno al livello 0). È questa un'applicazione particolare di un elegante e celebre ragionamento di Desirè André.

La figura 7 mostra la forma di una distribuzione che si incontra in varie applicazioni e spesso con conclusioni inattese (sul che sarebbe lungo intrattenerci). Comunque la figura mette in luce l'equivalenza di tre circostanze che si riflettono, nell'ordine, sulle tre parti della figura, dal basso verso l'alto.

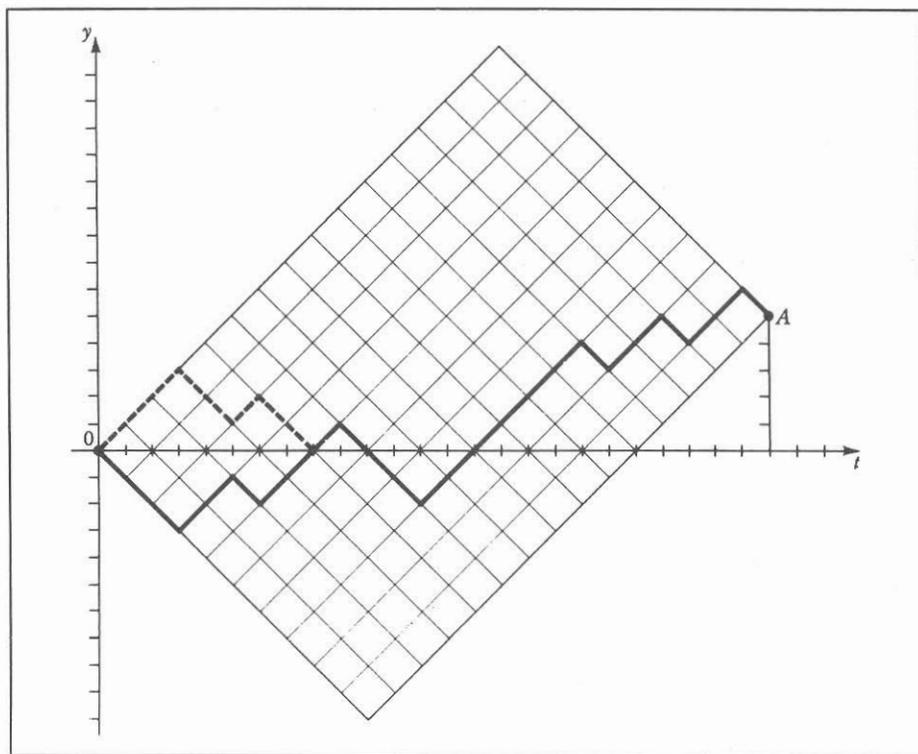


Fig. 6 Ragionamento di Desirè André: problema dello scrutinio. Le traiettorie da  $O$  ad  $A$  con primo passo discendente corrispondono biunivocamente a quelle con primo passo ascendente che però toccano l'asse  $t$ .