PROBLEMI DETERMINATI E INDETERMINATI NEL CALCOLO DELLA PROBABILITÀ.

In: « *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei* », 1930, vol. XII, fasc. 9, pp. 367-373.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XII, serie 6ª, 2° sem., fasc. 9. - Roma, novembre 1930-VIII.

Matematica (Calcolo delle probabilità). — *Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità.* Nota di B. DE FINETTI, presentata [1] dal Socio G. CASTELNUOVO.

L'applicazione del calcolo delle probabilità a problemi, anche pratici, sempre più delicati, ha spontaneamente condotto a trattarne facendo uso di sempre più delicati strumenti analitici; nel giudicare della legittimità di tale uso ci si è però quasi sempre limitati ad ammettere, quasi fosse lecito farlo convenzionalmente, che ci si possa fidare delle ragioni d'analogia che li suggeriscono. Ho avuto occasione più volte di rilevare quanto in tal campo sia necessario procedere con rigore e con diffidenza se non si vuole incorrere in errori anche gravi, e ho sottoposto a un esame critico parecchi punti particolari fra i più notevoli [2]. Delle difficoltà pregiudiziali molto sconcertanti che incontrai volendo proseguire i miei studi sulle funzioni a incremento aleatorio [3] mi persuasero però della necessità di una ricerca più generale, di cui espongo qui succintamente il risultato, che mi sembra notevole perchè molto semplice e significativo.

1. Il punto essenziale è di basarsi su un'impostazione rispondente al problema: è questo che, a mio modo di vedere, non si è mai fatto, ed è questo che mi propongo di fare. Ritengo necessario anzitutto separare nettamente ciò che riguarda le proposizioni del calcolo delle probabilità – e che ha un preciso valore logico, – da tutto ciò che si riferisce alla valutazione di una probabilità, e il cui valore non può che essere empirico.

Se ad es., ammesso che le probabilità p_f, p_c, p_r di estrarre da un mazzo di carte un fante, o un cavallo, o un re, siano $p_f = p_c = p_r = 1/10$, ne concludo che la probabilità p di estrarre una figura è $p = p_f + p_c + p_r = 3/10$, io eseguisco un ragionamento puramente logico: il fatto che i tre eventi considerati siano incompatibili è infatti logicamente vero, e, sotto tale condizione, la validità del teorema delle probabilità totali è logicamente sicura. Ma ha invece un valore indubbiamente empirico la valutazione delle probabilità dalla quale sono partito: se valuto $= 1/10$ la probabilità di estrarre un fante, questo che faccio non potrà essere che un giudizio empirico. La distinzione è nettissima e ha un'importanza fondamentale su cui è necessario insistere, perchè il *senso di ciò che è logico*, tanto affinato ormai in tutti i campi della geometria e dell'analisi, sembra ancora mancare totalmente in ciò che riguarda il calcolo delle probabilità. Nel primo caso si ha un ragionamento *logico* perchè varrebbe inalterato se si trattasse di tre eventi incompatibili qualunque E_f, E_c, E_r e della loro somma E anzichè dell'estrazione di un fante, un cavallo, un re,

(1) Nella seduta del 2 novembre 1930.

(2) Cfr. parecchie Note nei «Rendiconti dell'Istituto Lombardo» (una del 1928 e quattro del 1930).

(3) Cfr. tre Note in questi «Rendiconti», 1929, 2° sem.

una figura, da un mazzo di carte: il ragionamento dipende dunque soltanto dallo schema logico degli eventi in questione e non dal loro particolare significato. Non ha invece un significato logico il giudizio del secondo caso, in quanto non basta sapere che E_f, E_c, E_r sono incompatibili per concludere che sono ugualmente probabili e la loro probabilità è $= 1/10$; tale giudizio dipende da nozioni e considerazioni particolari suggerite dalla particolare precisazione degli eventi del nostro schema.

Non parleremo quindi della *probabilità* $\mathbf{P}(E)$ *dell'evento* E come di qualcosa di obbiettivamente determinato; considereremo invece tutte le funzioni $\mathbf{P}$ non contradicenti i teoremi del calcolo delle probabilità come espressioni di leggi formalmente ammissibili, lasciando alla pratica e all'opinione di ciascun individuo la scelta di *una* di tali funzioni come appropriata, caso per caso, a un concreto problema.

Riferendoci all'esempio precedente, considereremo come teoricamente accettabili tutte le ∞^3 leggi $\mathbf{P}$ per cui $\mathbf{P}(E_f) = x$, $\mathbf{P}(E_c) = y$, $\mathbf{P}(E_r) = z$, $\mathbf{P}(E) = x + y + z$ ove $x, y, z \geq 0$, $x + y + z \leq 1$; la legge in cui $x = y = z = 1/10$ non è che un caso particolarissimo, e la sua scelta, benchè suggerita da considerazioni spontanee e universalmente approvate, non è affatto imposta da ragioni logiche di cui la matematica debba o possa interessarsi.

Una tale completa separazione potrebbe a prima vista sembrare innaturale ed inutile; si vedrà invece che essa chiarisce i problemi in modo così lucido da dover apparire pienamente giustificata anche a chi non condivida la concezione filosofica della probabilità cui essa, per me, s'ispira (1). Anche cioè se, non volendola intendere come rispondente a una precisa, effettiva, essenziale, ragione di principio, ci si limiti a considerarne il mero aspetto formale di utile accorgimento d'impostazione. Basta infatti che il problema in esame non sia tanto semplice come nel precedente esempio, e il riconoscere se certe premesse sono o non sono sufficienti per implicare una certa conseguenza diviene questione delicatissima e mai sino ad oggi risolta, appunto perchè mancava la netta distinzione che ho trovato necessario introdurre.

2. Si osservi poi che la nostra impostazione (2) conduce a operare sempre e direttamente sugli eventi E (di quella certa classe d'eventi $\mathcal{E}$ della cui probabilità ci interessa occuparci) considerati come entità logiche (proposizioni categoriche). Mentre che ordinariamente si ritiene di doversi basare sulla considerazione dei *casi possibili*, di dover trattare gli eventi come aggregati di casi possibili, e ciò conduce a prospettare il problema in modo falso e privo d'ogni significato intrinseco. Si concepisce e si studia allora

(1) Cfr. il mio saggio *Probabilismo*, che si pubblicherà in « Logos ». V. anche « Boll. U. M. I. », dic. 1930.

(2) Conforme in ciò a quella di BOOLE; cfr. MEDOLAGHI, *La logica matematica e il calcolo delle probabilità* in « Boll. Ass. It. Attuari », n. 18, 1907 e bibliografia ivi.

la probabilità coi concetti della teoria della misura, e si finisce invariabilmente col lasciarsi trascinare da illusorie esteriori analogie. Dato un evento come aggregato di casi possibili, si pretende allora calcolarne (o peggio, come taluni direbbero, *definirne*) la probabilità escogitando qualche più o meno felice metodo di « misura ».

Nulla di tutto ciò sussiste secondo il mio punto di vista. Io ritengo che si possa e si debba, basandoci sui principii del calcolo delle probabilità (eventualmente precisati con rigore ove non lo fossero), determinare qual'è la classe più generale degli eventi la cui probabilità risulta determinata conoscendo le probabilità, assegnate per ipotesi, di una certa classe d'eventi $\mathcal{E}$, e quale la classe più generale degli eventi per cui tale conoscenza può fornire una limitazione (superiore o inferiore o bilaterale) alla corrispondente probabilità, mentre pei rimanenti nulla si potrà dire (1). Dato un evento A, si potrà allora, senza sentire alcun dubbio e senza tentare alcun artificio, rispondere sempre *a priori* e sicuramente se le condizioni poste determinano la probabilità $\mathbf{P}(A)$, la assoggettano a qualche limitazione, la lasciano completamente indeterminata. Si tratta semplicemente di riconoscere per quali valori x la funzione $\mathbf{P}(E)$, che rappresenta le già assegnate probabilità degli eventi E di $\mathcal{E}$, costituisce una legge di probabilità formalmente ammissibile nel campo $\mathcal{E} + (A)$ quando si ponga $\mathbf{P}(A) = x$. Se x è univocamente determinato, il problema di probabilità è determinato; altrimenti esistono infinite soluzioni x, e precisamente tutti gli x di un intervallo chiuso $x' \leq x \leq x''$, e in tal caso ogni criterio per determinare la probabilità è illusorio, l'indeterminatezza della soluzione essendo insita nella natura stessa del problema.

3. Diciamo subito poi che non parleremo qui delle probabilità subordinate. La probabilità « dell'evento E subordinatamente all'evento H » è concetto assai più delicato di quel che ordinariamente lo si consideri, e merita d'essere introdotto, e con ogni cura, solo in un secondo tempo. Non meravigli dunque la mancanza di un qualunque accenno alla nozione di eventi indipendenti, al teorema delle probabilità composte, e a quant'altro dipende dalla nozione di probabilità subordinata.

Da notarsi ancora che per « evento » intenderemo sempre un fatto unico ben determinato. Spesso la parola si usa promiscuamente, e si parla di un « evento » che può *ripetersi*, dar luogo a più o infinite « prove »; in questo senso, ad evitare equivoci, è più opportuno usare la parola *fenomeno*, e ogni « prova » del fenomeno sarà un *evento*. Ad es., l' « estrazione del 24 al lotto » è un fenomeno, l' « estrazione del 24 alla ruota di Roma il 25 ottobre 1930 » è un evento.

4. Passiamo ora al punto capitale del nostro problema: caratterizzare la classe delle funzioni $\mathbf{P}(E)$ da ritenersi *formalmente ammissibili* come *leggi di probabilità*. Senza approfondire l'analisi concettuale del problema, ampia-

(1) Cfr. la mia conferenza su *Le leggi differenziali e la rinunzia al determinismo* (Sem. Mat. Roma, 1930).

mente svolta altrove [1], prenderemo qui senz'altro come punto di partenza il risultato seguente, che assumeremo come definizione di « legge di probabilità ».

Consideriamo, in relazione a una qualunque funzione $\mathbf{P}(E)$ degli eventi E di una classe $\mathcal{E}$, i numeri aleatori del tipo

$$G = (\lambda_1 - p_1)\,S_1 + (\lambda_2 - p_2)\,S_2 + \cdots + (\lambda_n - p_n)\,S_n$$

dove $S_1 \cdots S_n$ sono numeri reali qualunque, $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ sono i numeri aleatori che assumono il valore 1 o 0 a seconda che certi n eventi $E_1 \cdots E_n$ di $\mathcal{E}$ si verificano o non si verificano, e $p_1 \cdots p_n$ sono i corrispondenti valori $\mathbf{P}(E_1) \cdots \mathbf{P}(E_n)$. Detto, per definizione, *scommessa unitaria sull'evento* E, *equa relativamente alla funzione* $\mathbf{P}$, il numero aleatorio $\lambda - p$ ($\lambda = 1$ o 0 a seconda che E si verifica o non si verifica, e $\mathbf{P}(E) = p$), le G relative alla funzione $\mathbf{P}$ sono le combinazioni lineari di scommesse unitarie, eque rispetto alla $\mathbf{P}$, su un numero finito di eventi di $\mathcal{E}$.

Ciò posto, diremo che la funzione $\mathbf{P}$ costituisce una legge di probabilità (una legge di probabilità formalmente ammissibile) SE E SOLTANTO SE PER NESSUN NUMERO ALEATORIO G AD ESSA RELATIVO SONO POSITIVI TUTTI I VALORI POSSIBILI [2].

Osserviamo, per dare una sommaria giustificazione di questa proprietà, che $(\lambda_1 - p_1)\,S_1$ è il guadagno (positivo o negativo) di chi puntasse una somma S_1 sul verificarsi dell'evento E_1 in base alla valutazione di probabilità $\mathbf{P}(E_1) = p_1$: è precisamente il numero aleatorio che assume i due valori $(1 - p_1)\,S_1$ e $-p_1 S_1$ a seconda che E_1 si verifica o no. Il numero aleatorio G precedentemente considerato rappresenta il guadagno di un certo insieme di scommesse fatte in base alla valutazione di probabilità $\mathbf{P}(E_1) = p_1, \cdots, \mathbf{P}(E_n) = p_n$; se la valutazione di probabilità è tale che conduce a considerare equa una scommessa in cui l'esito risulti in ogni caso favorevole a uno dei due competitori (sia certamente $G > 0$), la valutazione è ovviamente incoerente, inammissibile. È coerente, ammissibile, se in nessun modo dà luogo a una simile incongruenza.

Si osservi poi che la definizione implica immediatamente che per la probabilità p di un evento certo, impossibile, nè certo nè impossibile, si ha $p = 1$, $p = 0$, $0 \leq p \leq 1$.

5. Esaminiamo ora la portata di questa definizione, partendo dal caso più semplice e passando mano mano a quelli più complessi.

Sia $\mathcal{E}$ una classe finita e completa di eventi incompatibili, costituita cioè di n eventi $E_1 \cdots E_n$ di cui debba necessariamente verificarsene uno e uno solo. Allora condizione necessaria e sufficiente perchè $\mathbf{P}$ sia legge di probabilità in $\mathcal{E}$ è che valga il teorema delle probabilità totali

$$\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \cdots + \mathbf{P}(E_n) = 1\,.$$

(1) V. una Memoria di prossima pubblicazione nel « Giorn. Ass. It. Attuari ».

(2) La definizione non mostra immediatamente che le funzioni considerate esistano, e si possano riconoscere senza infiniti tentativi (per tutte le n^{ple} di parametri $S_1, \cdots, S_n$ per ogni n^{pla} d'eventi $E_1, \cdots, E_n$); ciò apparirà dalle condizioni, ad essa equivalenti, che tosto vedremo.

Allora infatti nell'espressione di G una e una sola delle λ è $= 1$, e le altre tutte nulle; se in particolare $S_1 = S_2 = \cdots = S_n = S \neq 0$, si avrà G uguale al numero certo (non più aleatorio) $[1 - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)] S$, il che è assurdo a meno che $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, così che $G = 0$. La condizione è quindi necessaria, ed è facile mostrare che è anche sufficiente [1]. Il precedente enunciato implica poi senz'altro che il teorema delle probabilità totali vale in ogni caso.

Dato allora un evento A, è facile vedere che la sua probabilità è determinata se A è la somma logica di alcuni degli eventi E_i; altrimenti possiamo soltanto affermare che la probabilità di A è non minore della somma delle probabilità degli eventi E_i che implicano A e non maggiore della somma analoga per gli eventi E_i compatibili con A.

6. Sia $\mathcal{E}$ una classe finita di eventi $E_1 \cdots E_n$ qualunque. Consideriamo i 2^n *costituenti* $C_1 \cdots C_s$, e cioè gli eventi che si ottengono dal prodotto logico $E_1 E_2 \cdots E_n$ sostituendovi un numero qualunque degli eventi E_i coi loro contrari (negazioni): essi formano una classe finita e completa di eventi incompatibili, e ogni evento E_i è la somma logica di 2^{n-1} tra essi. Va notato che in generale non tutti i 2^n prodotti considerati saranno eventi possibili, e i costituenti si ridurranno allora in effetto a un numero minore ($s \leq 2^n$); computare, come facemmo, anche i costituenti impossibili è però indifferente, purchè non si dimentichi che la loro probabilità è necessariamente nulla. La più generale legge di probabilità per i costituenti è, per quanto visto, quella che attribuisce come probabilità ai costituenti possibili $C_1 \cdots C_s$ dei valori non negativi $q_1 \cdots q_s$ qualunque di somma $= 1$; si dimostra inversamente che ogni legge di probabilità definita in $\mathcal{E}$ si può prolungare in una legge di probabilità definita per i costituenti C_i, e si conclude quindi che la valutazione di probabilità $\mathbf{P}(E_1) = p_1, \cdots, \mathbf{P}(E_n) = p_n$ è ammissibile se e soltanto se esistono s numeri $q_1 \cdots q_s$ non negativi soddisfacenti il sistema di $n + 1$ equazioni lineari in s incognite

$$\sum\nolimits_i^{(1)} q_i = p_1, \cdots, \sum\nolimits_i^{(n)} q_i = p_n, \sum\nolimits_i q_i = 1, \qquad \text{ove } \sum\nolimits_i^{(h)}$$

indica la somma estesa a quegli indici i per cui C_i è un costituente che appartiene ad E_h (un evento che implica E_h).

Dato ora un evento A, in quali casi la sua probabilità x è determinata? Supponiamo dapprima che A sia la somma di alcuni fra i costi-

(1) Gli n valori $G_1 \cdots G_n$ possibili per G (corrispondenti all'avverarsi di $E_1 \cdots E_n$) non possono essere tutti > 0, altrimenti sarebbe anche $\sum_1^n {}_i\, p_i G_i > 0$, mentre, essendo $G_i = S_i - \sum_1^n {}_j\, p_j S_j$, $\sum_1^n {}_j\, p_j = 1$, si ha sempre (per $S_1 \cdots S_n$ qualunque) $\sum_1^n {}_i\, p_i G_i = 0$.

tuenti $C_1 \cdots C_s$; la probabilità di A sarà allora la somma delle q_i corrispondenti: $x = \sum_i^{(A)} q_i$. Se tale equazione è linearmente dipendente dalle precedenti la soluzione è unica; se non lo è, esistono in generale infinite soluzioni, e cioè, per una proprietà generalissima che accenneremo in seguito, tutti i valori x di un certo intervallo chiuso $x' \leqq x \leqq x''$. Il fatto che l'equazione sia linearmente dipendente dalle precedenti non dipende che dall'evento A e dalla classe $\mathcal{E}$; è quindi una proprietà logica, e non una proprietà dipendente dalla funzione $\mathbf{P}$. Diremo allora in tal caso che l'evento A *è linearmente dipendente* da $E_1 \cdots E_n$, o anche, essendo la proprietà simmetrica, che $A, E_1, \cdots, E_n$ sono *eventi linearmente dipendenti.* Ciò equivale a dire che fra i numeri aleatori $\lambda_A, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ uguali a 1 o 0 a seconda che $A, E_1, \cdots, E_n$ si verifica o no, esiste una combinazione lineare costante (uguale a un numero certo, non aleatorio), ossia che è nulla la matrice $\| a_{ik} \| (i = 0, 1, \cdots, n, n+1; k = 1, 2, \cdots, s)$ ove a_{ik}, per $i = 0, 1, \cdots, n$, è $= 1$ o 0 a seconda che C_k implica o non implica E_i (posto $E_0 = A$), e $a_{ik} = 1$ per $i = n + 1$.

Se A non è una somma di costituenti, siano A′ e A″ la massima e la minima rispettivamente fra tali somme che vi sono contenute e che lo contengono; si potrà dire allora che è $x' \leqq x \leqq x''$ ove x' sia la minima probabilità ammissibile per A′ ed x'' la massima probabilità ammissibile per A″, e che tutti questi valori di x sono ammissibili.

7. Il caso in cui $\mathcal{E}$ è classe infinita non presenta nessuna nuova difficoltà: la condizione di definizione mette infatti in evidenza che $\mathbf{P}$ è una legge di probabilità ammissibile in $\mathcal{E}$ se (e ovviamente solo se) rappresenta una legge ammissibile di probabilità in qualunque sottoclasse finita di $\mathcal{E}$. Detti *eventi linearmente dipendenti* da $\mathcal{E}$ quelli che sono linearmente dipendenti da almeno una sottoclasse finita di $\mathcal{E}$, avremo che sono essi tutti e soli gli eventi la cui probabilità risulta univocamente determinata assegnando comunque una legge di probabilità in $\mathcal{E}$. Per gli altri eventi, ogni sottoclasse finita di $\mathcal{E}$ dà una limitazione; i valori che soddisfano tutte le infinite limitazioni così ottenute sono i valori ammissibili della corrispondente probabilità. I valori ammissibili costituiscono un intervallo chiuso, come scende immediatamente dalla seguente proposizione generalissima e per sè stessa importante, facile conseguenza della posta definizione:

Le leggi di probabilità costituiscono un insieme convesso chiuso. E cioè: se $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n$ sono leggi di probabilità in una classe d'eventi $\mathcal{E}$, lo è anche $\mathbf{P} = \mu_1 \mathbf{P}_1 + \mu_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \mu_n \mathbf{P}_n$ con $\mu_1 \cdots \mu_n$ coefficienti non negativi di somma $= 1$. Se $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_n \cdots$ è una successione di leggi di probabilità per una classe d'eventi $\mathcal{E}$, e per ogni evento E di $\mathcal{E}$ esiste il limite di $\mathbf{P}_n(E)$ per $n \to \infty$, la funzione $\mathbf{P}(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(E)$ è una legge di probabilità in $\mathcal{E}$.

Un caso particolare notevole e abbastanza frequente in pratica è quello in cui la negazione di un evento $\mathcal{E}$ e il prodotto di due eventi $\mathcal{E}$ è ancora sempre un evento $\mathcal{E}$, o almeno una somma di eventi $\mathcal{E}$ incompatibili in numero finito. Allora gli eventi linearmente dipendenti da $\mathcal{E}$ non sono che le somme di un numero finito di eventi $\mathcal{E}$ incompatibili; per un altro evento A il minimo e il massimo valore ammissibile della probabilità è rispettivamente il limite superiore delle probabilità degli eventi A′, somme di $\mathcal{E}$ incompatibili in numero finito contenute in A, e il limite inferiore delle probabilità degli eventi A″, somme analoghe contenenti A.

8. Ci siamo finora occupati di distinzioni puramente logiche. Data una classe di eventi $\mathcal{E}$, in base a pure operazioni logiche si può riconoscere se per un evento A la probabilità rimane univocamente determinata, o superiormente o inferiormente o bilateralmente limitata, oppure è del tutto indeterminata, quando si assegni *comunque* la legge di probabilità in $\mathcal{E}$. Non è escluso però che, *per una particolare* legge di probabilità **P**, un evento per la cui probabilità si dovrebbe avere una limitazione risulti in effetto avere una probabilità o univocamente determinata o completamente indeterminata: può darsi infatti che gli estremi trovati vengano a coincidere o si riducano a zero ed uno.

9. Consideriamo un esempio importante e comunissimo: quello che serve di base allo studio dei numeri aleatori, e che si suole sempre prendere a tipo dei problemi che andrebbero impostati servendosi della teoria della misura. Si abbia cioè da «scegliere a caso» un punto di un dato segmento (ossia un numero dell'intervallo 0,1), e supponiamo assegnata la probabilità di ogni segmento. Il prodotto logico (parte comune) di due segmenti è ancora un segmento, e l'aggregato complementare di un segmento è costituito di uno o due segmenti; siamo dunque nell'ultimo caso del n. 7. I soli aggregati per cui la probabilità debba allora sempre risultare determinata sono le somme di segmenti in numero finito; per gli altri la probabilità è compresa fra quelle corrispondenti alle somme di segmenti in numero finito che rispettivamente vi sono contenute o li contengono. In particolare, per un insieme ovunque denso il cui complementare sia pure ovunque denso la probabilità è completamente indeterminata: nulla si può concludere ad es. in nessun caso sulla probabilità dei punti ad ascissa razionale.

Per una legge di probabilità particolare, la probabilità può risultare determinata anche per altri aggregati che le somme di segmenti in numero finito. Se ad esempio la probabilità di ogni intervallo è proporzionale alla lunghezza, allora la probabilità risulta determinata anche per gli aggregati la cui frontiera può essere racchiusa in numero finito di segmenti di lunghezza complessiva piccola quanto si vuole; nel caso più generale la probabilità può assumere qualunque valore compreso fra il «longore infero» e il «longore supero» nel senso di Peano (*Form. Math.*). Per una qualunque legge di probabilità vale un criterio analogo: che la frontiera sia racchiudibile in un numero finito di segmenti di probabilità complessiva comunque piccola.

Tutti i criteri basati sulla teoria della misura, sull'estensione alle classi numerabili del teorema delle probabilità totali, su altri simili metodi di passaggio al limite, sono totalmente illusori ogni qual volta conducono a precisare la conclusione più di quanto non avvenga in forza delle proprietà ora enunciate, e cioè più di quanto il problema stesso lo consenta.