Come giustificare elementarmente la “ legge normale ,, della probabilità?

Ho dovuto propormi [1] il seguente problema: come ricavare la « legge normale » (o legge gaussiana degli errori) e chiarirne il significato, col minimo apparato matematico e col massimo potere persuasivo? Le considerazioni cui sono stato così condotto potranno forse interessare, sia per il problema in sè stesso, sia per una questione analitica che s'incontra, e che è sviluppata nell'appendice.

1. La « legge normale » è quella che caratterizza una forma particolarmente notevole di distribuzione, e che ha un'importanza ben nota (forse anche sopravalutata) nel calcolo delle probabilità, nella statistica, nella teoria degli errori d'osservazione. Fu quest'ultima teoria a condurre per la prima volta a ricavare tale legge, e fu precisamente il Gauss (1809) che, convinto dell'esistenza di una legge tipica degli errori accidentali, e cercando quindi quale ne debba essere la forma, e cioè quale sia la probabilità $\varphi(x)dx$ di commettere un errore compreso tra x ed $x + dx$ nella misura di una grandezza fisica, dedusse, in base a un ragionamento che tosto vedremo, la seguente espressione della funzione φ:

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

[1] In occasione del corso di Calcolo delle probabilità nella Scuola di specializzazione in Assicurazioni presso la R. Università degli Studi Economici e Commerciali di Trieste, Scuola frequentata in prevalenza da laureati in legge.

Il parametro h misura la « precisione » del procedimento di misura, « precisione » che è tanto maggiore quanto più è grande h. Ciò risulta in modo più significativo calcolando il valor medio, che si indica con σ^2, del quadrato dell'errore:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-h^2x^2}dx = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2}dz = \frac{1}{2h^2};$$

la radice $\sigma = 1/h\sqrt{2}$ di tale valore, che si chiama « scostamento quadratico medio », e che dà, in un certo senso, la misura dell'*ordine di grandezza presumibile* dell'errore, è dunque inversamente proporzionale ad h; si può anche osservare che del pari inversamente proporzionale ad h risulta lo *scarto mediano* (scarto che ha probabilità $1/2$ di essere superato, e che ha il valore $0{,}4769\,h^{-1} = 0{,}6745\,\sigma$), e qualunque altra misura dell'ordine di grandezza probabile dell'errore, perchè, introducendo σ in luogo di h come parametro nell'espressione di φ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}},$$

si vede che σ vi entra appunto e solo per fissare l'unità di misura.

Il ragionamento di GAUSS è riportato in quasi tutti i trattati sulla « teoria degli errori »; poichè la forma in cui è ordinariamente espresso mi è sempre sembrata di difficile comprensione, ritengo opportuno riassumerla [1].

La probabilità che, facendo n prove indipendenti, in ciascuna delle quali la probabilità di un valore compreso tra x ed $x + dx$ sia $\varphi(x)dx$, si ottengano per i numeri aleatori $X_1, X_2, \dots X_n$ dei valori compresi fra x_1 ed $x_1 + dx_1$, x_2 ed $x_2 + dx_2, \dots, x_n$ ed $x_n + dx_n$, è (per il teorema delle proba-

[1] Per una esposizione più completa e di chiarezza ammirevole si veda G. CASTELNUOVO, *Calcolo delle probabilità*, Vol. II, pag. 5; vi si troveranno anche tutte le indicazioni di cui si potrà sentire il bisogno nella lettura del presente numero, sia per quanto riguarda le osservazioni critiche relative al procedimento, sia per notizie di carattere storico, sulla questione di priorità tra GAUSS e LAPLACE.

bilità composte)

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n\,;$$

se pensiamo φ determinata *a meno di una traslazione* e consideriamo cioè le infinite leggi $\varphi(x-m)$, con m reale qualunque, possiamo chiederci per quale valore di m la densità di probabilità

$$P(m)=\varphi(x_1-m)\,\varphi(x_2-m)\ldots\varphi(x_n-m)$$

assume il massimo valore. Annullando la derivata logaritmica di $P(m)$ si ottiene l'equazione

$$\Sigma_i\psi(x_i-m)=0 \quad \text{con} \quad \psi(x)=\varphi'(x)/\varphi(x).$$

Ora il Gauss si chiede: esistono delle leggi φ tali che $P(m)$ sia massimo quando si prenda m uguale alla media aritmetica $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ di $x_1\ldots x_n$? Per ciò occorre e basta che l'equazione $\Sigma_i\,\psi\,(x_i-m)=0$ sia equivalente all'altra $\Sigma_i(x_i-m)=0$, per il che dev'essere [1] $\psi(x)=kx$, e quindi $\varphi(x)=Ce^{\frac{1}{2}kx^2}$. La condizione $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$ permette di determinare i valori delle costanti in modo da ricondurci alla forma sopra riportata della legge normale.

Fin qui, e cioè in tutto il ragionamento, in quanto ragionamento formale, nulla da ridire. Ma lo scopo di tale ragionamento non vorrebbe essere quello di verificare che la legge normale è la sola che gode della proprietà considerata, ma bensì di dimostrare come essa sia la sola ammissibile, in un vasto ma non ben precisato campo di problemi, in quanto si considera la detta proprietà come necessaria.

Molte critiche si possono fare e sono state fatte al riguardo,

---

[1] Di solito tale passaggio si giustifica in base a una nuova equazione differenziale; mi sembra invece convenga stabilirlo immediatamente osservando che ne scende:

$$\psi(-x)=-\psi(x)$$
$$\psi(x+y)=-\psi(-x)-\psi(-y)=\psi(x)+\psi(y).$$

Per tale equazione funzionale, cfr. la nota [2] a pag. 206.

entrando nel merito stesso dell' impostazione e del largo campo che vi ha l' arbitrio; più decisiva mi sembra però l' obiezione seguente, che nega ogni valore al concetto informativo anche supponendo infondate (mentre non lo sono) le critiche relative alla sua formulazione matematica. In sostanza, il ragionamento non dice che, date certe premesse, più o meno accettabili e intuitive, si deve concludere che la legge di probabilità risulta quella « normale », ma invece che, per giustificare in modo assoluto l'uso dei pratici di basarsi spesso sulla media aritmetica, bisogna imporre alla legge di probabilità di avere la forma gaussiana (1). Sarebbe quanto sostenere che la legge della mortalità *deve* essere quella di GOMPERZ-MAKEHAM perchè altrimenti gli attuari non potrebbero calcolare i valori delle assicurazioni su due teste mediante una « età ragguagliata » (2).

---

(1) Una vigorosa critica di simili pseudodimostrazioni si può leggere in P. LÉVY, *Calcul des probabilités*, Ch. IV, n. 31, pag. 34 (La notion de précision d'une mesure).

(2) Sia $\mu(x)dx$ la probabilità che un individuo di età x muoia prima di raggiungere l'età $x + dx$; $\mu(x)$ si dice allora « intensità di mortalità » all'età x, e $p_x(z) = e^{-\int_0^z \mu(x+t)dt}$ è la probabilità che un individuo di età x sopravviva all'età $x + z$. In particolare sarebbe ad es. $p_x(z) = e^{-\mu z}$ se fosse $\mu(x) = \mu =$ costante, come si ha per la disintegrazione degli atomi di radio (probabilità di « morte » indipendente dall' « età »); per gli uomini è invece intuitivo, e la statistica lo conferma, che $\mu(x)$ cresce con l'età (almeno a prescindere dal periodo della fanciullezza), e una formula empirica che esprime in buon accordo con l'esperienza questo peggioramento della mortalità al crescere dell'età è quella proposta da MAKEHAM (1860)

$$\mu(x) = a + bc^x$$

(nella forma particolare con $a = 0$ proposta da GOMPERZ fin dal 1825).

La probabilità che, di due individui di età x e y, uno almeno muoia entro un tempuscolo dx, è data da $[\mu(x) + \mu(y)]dx$, e la probabilità che essi sopravvivano dopo un tempo z è

$$p_{x,y}(z) = e^{-\int_0^z [\mu(x+t)+\mu(y+t)]dt} = p_x(z)p_y(z);$$

nel caso della legge di GOMPERZ-MAKEHAM si ha

$$\mu(x+t) + \mu(y+t) = 2a + b(c^{x+t} + c^{y+t}) = 2[a + bc^{\xi+t}] = 2\mu(\xi+t)$$

ove si ponga $c^\xi = \frac{1}{2}(c^x + c^y)$, e si ha quindi

$$p_{x,y}(z) = e^{-2\int_0^z \mu(\xi+t)dt} = p_{\xi,\xi}(z) = [p_\xi(z)]^2.$$

Taluno tenta giustificare il punto di partenza facendolo a sua volta derivare dai teoremi assintotici di TCHEBYCHEFF [1]; ora, essi dicono che la media costituisce un valore molto approssimato *qualunque sia* la legge di probabilità (purchè a scostamento quadratico medio finito), ed è pertanto ancor meno giustificato pretendere che la forma della legge di distribuzione debba essere proprio quella che si distingue dalle altre non perchè goda di una proprietà importante da cui tutte le altre sono lontane, ma di una proprietà che, entro i limiti della pratica significatività, è comune a tutte, ed è soltanto esprimibile per essa in un modo più rigido e formalistico.

Concludendo, ritengo che tale procedimento abbia un solo grande merito: quello storico, quello di aver fatto considerare per la prima volta questa così notevole forma di distribuzione.

2. Poco più tardi (1810; l'impostazione risale al 1780) fu messa in luce da LAPLACE la proprietà veramente significativa che caratterizza la legge normale e giustifica la posizione di privilegio che ad essa compete. Si tratta di questo: che se l'errore complessivo X è la somma di un grande numero di errori elementari indipendenti $X_1, X_2 \dots X_n$, allora X segue, con approssimazione tanto maggiore quanto più i singoli errori X_i sono « trascurabili » rispetto all'errore complessivo, quanto più *si confondono* in esso, la legge normale.

Il fatto poi che $X_1 \dots X_n$ siano degli « errori » non è che

---

A parole: la coppia di due individui di età x, y (e lo stesso vale per una terna, un'ennupla di individui di età $x_1 \dots x_n$) si comporta — per riguardo alla probabilità di sopravvivenza al completo dopo un generico tempo z — allo stesso modo di una coppia (risp. ennupla) di individui di una medesima età media ξ, che si dice « età ragguagliata ». È ovvio il vantaggio che ne deriva per i calcoli relativi ad assicurazioni su più teste: invece che eseguire i calcoli per tutte le coppie di età x, y (o, in genere, ennuple $x_1 \dots x_n$) basta limitarsi alle sole coppie ξ, ξ (ennuple $\xi, \xi, \dots, \xi$) di età uguale.

Inversamente si dimostra che la legge cui il GOMPERZ e il MAKEHAM erano giunti per via empirica è l'*unica* (insieme a un suo caso limite) che gode di questa importante proprietà (teorema di Quiquet); la possibilità delle accennate semplificazioni di calcolo è consentita quindi nella pratica soltanto dalla fortunata e singolare circostanza che la legge empirica della mortalità segue proprio all'incirca l'andamento rappresentato da quella formula.

[1] Cfr. ad es. U. BROGGI, *Matematica Attuariale*, nota in calce a p. 35.

un' interpretazione che ho seguita finora per riallacciarmi ai brevi cenni precedenti sull' origine della legge gaussiana, ma che, per sè stessa, è del tutto inessenziale; d' ora in poi parleremo sempre di « numeri aleatori » (variabili casuali), che potranno eventualmente avere il carattere di « errori », ma potrebbero anche avere un' interpretazione di tutt' altro genere. La proprietà fondamentale che ci interessa è quindi, nella formulazione più larga, la seguente: *se* $X_1, X_2 \dots X_n$ *sono numeri aleatori indipendenti, la loro somma* $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ *segue la legge normale con approssimazione tanto maggiore quanto più il contributo di ogni singolo degli addendi è « trascurabile » rispetto alla somma* (1).

Ora ci si può proporre un programma massimo e un programma minimo: il programma massimo consiste nel dimostrare tale proprietà e giungere alla legge normale per tale via, quello minimo — cui ci si deve forzatamente limitare, almeno attualmente, se non si vuol fare uso che delle nozioni più volgarizzabili dell' analisi — consiste invece nell' annunciare, come risultato di cui si omette la dimostrazione, la tendenza verso una legge limite nelle circostanze enunciate, e nel dimostrare che, *ammesso che una tale legge limite esista, essa non può avere altra forma che quella della « legge normale »*. È al programma minimo che ci limiteremo.

Quello che specialmente mi preme mettere in luce, è come tale risultato si possa giustificare in modo facile e insieme concettualmente significativo, basandosi sulla nozione di *legge stabile*. Tale nozione, e la possibilità che ne deriva di ricavare l' espressione della legge normale, è stata messa già opportunamente in rilievo dal LÉVY (2), che sviluppa però il

---

(1) È questo il concetto informatore della dimostrazione di LAPLACE. Fra i metodi più importanti per svolgere tale dimostrazione basti citare: *a*) il metodo dei momenti (Tchebycheff-Markoff-Liapounoff-Stieltjes-Castelnuovo, ecc.), cfr. G. CASTELNUOVO, *Calcolo delle probabilità*, vol. II, pp. 154-188; *b*) il metodo della funzione caratteristica (Cauchy-Poincaré-Lévy), cfr. P. LÉVY, *Calcul des probabilités*, pagg. 233 e segg.; *c*) il metodo basato sull' equazione del calore (Petrovski-Khintchine-Kolmogoroff), cfr. A. KHINTCHINE, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*; *d*) il metodo di Lindeberg, che si può esporre (cfr. LÉVY, loc. cit.) mediante il procedimento della funzione caratteristica.

(2) P. LÉVY, Op. cit., pagg. 252 e segg. Cfr. anche P. LÉVY, *Sur le rôle de la loi de Gauss dans la théorie des erreurs*, « C. R. », 174, (1922) pagg.

ragionamento mediante il metodo della funzione caratteristica; il presente lavoro ha lo scopo di mostrare come, col medesimo ragionamento di partenza, si possa giungere a un' impostazione molto più semplice, e precisamente al metodo che risale a MAXWELL [1], e fu poi ripreso anche da altri Autori, ma che, senza la giustificazione basata sul concetto di legge stabile (e che non mi consta sia nota) era privo di ogni valore sostanziale.

3. Precisiamo concetti e ragionamenti.

a) Ammettiamo che esista una legge $\varphi(x)$, che diremo « legge normale ridotta » (di cui vogliamo determinare l'espressione supposta tuttora incognita) tale che, se X è somma di un grandissimo numero di numeri aleatori indipendenti $X_1, X_2 \dots X_n$, ed ha valor medio $m=0$ e scostamento quadratico medio $\sigma=1$, la legge di probabilità di X sia approssimativamente data da $\varphi(x)$ [2].

b) Se, abbandonando le ultime restrizioni, m e σ sono valori qualunque, la legge di probabilità (legge normale, in generale) è invece:

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right):$$

ciò risulta senz'altro dal fatto che $Y=\frac{1}{\sigma}(X-m)$ segue in tal caso la legge normale ridotta, essendo, per Y,

$$m_Y=0, \quad \sigma_Y=1.$$

855-857 e G. PÓLYA, *Herleitung des Gauss-schen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung*, « Math. Zeitschrift », B. 18, H. 1-2, 1923.

(1) J. C. MAXWELL, *Illustration of the Dynamical Theory of Gas*, « Brit. Ass. », 1859.

(2) Ciò, naturalmente, vale soltanto sotto certe condizioni restrittive, che però non è necessario precisare per poter svolgere il seguente ragionamento, dal quale, d'altronde, bisogna dirlo, non è possibile ricavare se e sotto quali condizioni tale ammissione è effettivamente vera. Volendo, si può, per fissare le idee, enunciare la semplice condizione che gli addendi X_i abbiano i valori possibili tutti inferiori ad $\varepsilon\sigma$, ove ε è piccolo, e σ è lo scostamento quadratico medio della somma. Quanto più ε è prossimo a zero, tanto più la legge di probabilità di X è necessariamente prossima alla legge normale. Bisogna però avvertire, in tal caso, che il teorema sussiste ancora sotto ipotesi molto meno restrittive.

c) Se $X = \Sigma_i X_i$ e $Y = \Sigma_i Y_i$ sono ciascuno la somma di un numero grandissimo dei numeri aleatori indipendenti

$$X_1\, X_2 \dots X_h \quad Y_1\, Y_2 \dots Y_k,$$

anche X e Y sono indipendenti, e la loro somma $Z = X + Y$ è essa stessa, e a fortiori, la somma di un numero grandissimo di numeri aleatori indipendenti.

d) Quindi la legge normale è *stabile*, nel senso che se X e Y sono numeri aleatori indipendenti che seguono la legge normale, anche la loro somma deve seguire la legge normale.

e) Ricordiamo che, se m_1 ed m_2, σ_1 e σ_2, sono rispettivamente i valori medi e gli scostamenti quadratici medi di X e di Y, il valor medio e lo scostamento quadratico medio di $Z = X + Y$, se X e Y sono indipendenti, sono:

$$m = m_1 + m_2, \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

f) Si conclude quindi che, componendo le leggi di probabilità

$$\frac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{x - m_1}{\sigma_1}\right) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sigma_2}\varphi\left(\frac{x - m_2}{\sigma_2}\right)$$

si ottiene la legge di probabilità:

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\varphi\left(\frac{x - (m_1 + m_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right).$$

Si tratta di dimostrare che tale condizione determina completamente la « legge normale ».

4. Per procedere in modo intuitivo, rappresentiamo cartesianamente X e Y, e consideriamo la distribuzione di probabilità sul piano xy. Sia $f(x, y)dS$ la probabilità che la coppia di numeri aleatori X, Y cada nell'intorno dS del punto x, y; $f(x, y)$ si dice densità di probabilità, e possiamo anche, per fissare le idee, interpretarla come una distribuzione continua di massa su un piano xy, o, meglio ancora, possiamo pensare un modello di questa distribuzione di probabilità costituito da un solido omogeneo C di altezza $h = f(x, y)$ poggiante sul piano xy. La probabilità che X, Y cadano in una certa area A è il volume del pezzo di solido C che sovrasta A; in partico-

lare, la probabilità che X cada tra x ed $x+dx$ è data dal volume di una « fetta » sottilissima tagliata parallelamente all'asse y, la probabilità che Y cada tra y ed $y+dy$ si ha tagliando una fetta parallelamente all'asse x, la probabilità che $Z=X+Y$ cada tra z e $z+dz$ in modo del tutto analogo tagliando una fetta parallelamente alla seconda bisettrice, e, in generale, la probabilità che $\alpha X+\beta Y$ cada tra due valori determinati, si ha tagliando una fetta nella direzione $\alpha x+\beta y=\text{cost}$.

Sarebbe facile esprimere tutte queste semplici proprietà mediante integrali: la probabilità che X, Y cadano in una certa area A è infatti:

$$P_A=\iint_A f(x,y)dxdy;$$

voglio però svolgere il ragionamento nel modo più elementare e intuitivo, perchè questo è lo scopo principale che mi preoccupa.

5. Se X e Y sono indipendenti, ed è $\varphi_1(x)dx$ rispettivamente $\varphi_2(y)dy$ la probabilità che X cada tra x e $x+dx$, e Y tra y e $y+dy$, si ha evidentemente che:

$$\varphi_1(x)\varphi_2(y)dxdy=f(x,\ y)dxdy$$

è la probabilità che X, Y cadano nel rettangolino tra

$$x,\ x+dx,\quad \text{e}\quad y,\ y+dy,$$

ed è quindi

$$f(x,\ y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y).$$

Supponiamo che X e Y seguano la legge normale, e, senza perdere in generalità, potremo supporre che seguano la legge normale ridotta, ossia che $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$. Dalla stabilità della legge normale sappiamo che $\alpha X+\beta Y$ (α e β coefficienti qualsiansi) segue allora la legge normale con $m=0$ e $\sigma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; se in particolare prendiamo α e β tali che $\alpha^2+\beta^2=1$ (e li possiamo allora scrivere $\alpha=\cos\theta$, $\beta=\text{sen}\,\theta$) anche $\alpha X+\beta Y$ seguirà la legge normale ridotta φ.

Ciò significa che la distribuzione di probabilità è la stessa in tutte le direzioni, o, in altre parole, che il volume di C compreso in una qualunque « fetta » (fra due qualunque piani verticali paralleli) non cambia facendo comunque ruotare il solido C attorno all'asse $x = y = 0$. Che questa condizione equivalga a dire che C deve essere un solido di rotazione sembra senz'altro plausibile; la dimostrazione di tale teorema sarà sviluppata in appendice a questo lavoro, perchè, se è necessario, per il rigore del procedimento, esser certi della sua verità, è ben sufficente, in una trattazione elementare, dare tale fatto come un risultato di geometria già acquisito.

Ammettiamo quindi che C sia un solido di rotazione, e cioè che $f(x, y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$ sia funzione soltanto della distanza dall'origine [1] ossia di $x^2 + y^2$: dall'equazione

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = c^2 F(x^2 + y^2) \qquad (c = \varphi(0))$$

che è comodo scrivere così, col fattore costante c^2, perchè sia $F(0) = 1$, si ricava subito:

$$c^2 F(x^2) = \varphi(0)\,\varphi(x) = c\varphi(x)$$

e quindi

$$F(x^2 + y^2) = \frac{1}{c^2}\,\varphi(x)\,\varphi(y) = F(x^2)F(y^2)$$

od anche

$$\log F(x^2 + y^2) = \log F(x^2) + \log F(y^2).$$

Si ottiene [2]:

$$\log F(x^2) = kx^2, \quad F(x^2) = e^{kx^2}, \quad \varphi(x) = ce^{kx^2},$$

e si giunge quindi, determinando le costanti, alla legge normale ridotta.

---

[1] Il MAXWELL e altri AA. si basavano su questa stessa condizione ammettendo, in sostanza, la proprietà da essa espressa, in base alla convinzione, giusta ma non giustificata, che un vettore le cui componenti X e Y siano dei numeri aleatori indipendenti seguenti la legge normale debba avere una legge di probabilità per cui « tutte le direzioni siano ugualmente probabili ».

[2] Accenniamo al modo con cui si dimostra, che, sotto condizioni molto ampie, l'equazione funzionale $f(x + y) = f(x) + f(y)$ non ammette altre soluzioni che le funzioni lineari omogenee $f(x) = kx$.

Sia $f(1) = k$; ne scende $f(2) = f(1) + f(1) = 2k$, $f(3) = 3k$, e in generale $f(n) = nk$ per n intero, e ancora $f(x) = kx$ per ogni x razionale dovendo essere $nf(m/n) = f(m) = mk = nk(m/n)$. Se f è continua, è quindi sempre $f(x) = kx$.

Una soluzione che non fosse di tale tipo sarebbe dunque necessaria-

APPENDICE

Il lemma di cui avevamo bisogno nella precedente dimostrazione era il seguente:

Se un solido C *compreso tra il piano* $z = 0$ *e la superfice continua* $z = f(x, y) \geq 0$ *è tale che il volume della fetta compresa fra due piani verticali paralleli qualunque* $ax + by = r$, $ax + by = s$ *non varia facendo ruotare* C *intorno all'asse* z, *allora esso è un solido di rotazione, ossia* $f(x, y)$ *è necessariamente funzione di* $x^2 + y^2$. È ovvio inversamente che se C è un solido di rotazione la proprietà è certamente verificata.

La condizione voluta significa che esiste una funzione $F(\rho)$ della sola ρ tale che, essendo $ax + by = 0$ un qualunque piano passante per l'asse z, la fetta di C compresa fra esso e il piano parallelo a distanza ρ ha sempre volume $F(\rho)$. Per sua natura $F(\rho)$ è decrescente, $F(\rho) = 0$ per $\rho = 0$, $F(\rho) \to 1/2$ per $\rho \to \infty$ se si pone $= 1$ il volume totale del solido: $1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy$.

Ed è

$$F(\rho) = \int_0^\rho dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy, \quad F'(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho, y)dy,$$

cosicchè la condizione si può anche enunciare: l'integrale di $f(x, y)$ lungo una retta qualunque è funzione soltanto della distanza di tale retta dall'origine.

Vediamo in primo luogo se tale equazione si può rendere soddisfatta mediante una funzione $f(x, y)$ che dipenda soltanto dalla distanza dall'origine:

$$f(x, y) = \varphi(r) \quad \text{con} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Su una retta $x = \text{cost.}$ si ha:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad dy = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = 2\int_x^\infty \frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

---

mente discontinua; si vede poi facilmente che sarebbe ovunque discontinua ed ovunque non limitata (neppure unilateralmente), cosicchè anche la condizione di essere limitata, oppure di essere positiva, ecc. ecc. (e ciò anche nell'intorno di un sol punto) bastano ad assicurare che $f(x) = kx$. (Cfr. p. es. l'art. V di G. Vitali in « Questioni riguardanti le matematiche elementari » raccolte da F. Enriques. Vol. I, pag. 226 (§ 12).

e si ha dunque l' equazione:

$$F(\rho) = 2\int_{\rho}^{\infty} \frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

molto simile a quella classica di ABEL cui ci si può ricondurre mediante la sostituzione:

$$t = r^{-2}, \quad r = t^{-1/2}, \quad dr = -\,{}^1\!/_2\, t^{-3/2}dt, \quad \tau = \rho^{-2}, \quad \rho = \tau^{-1/2},$$

che dà:

$$F'\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) = \int_0^{\tau} \sqrt{\frac{\tau}{t^3}} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt}{\sqrt{\tau - t}}$$

ossia

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} F'\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) = \int_0^{\tau} \frac{\frac{1}{\sqrt{t^3}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{\sqrt{\tau - t}}\, dt.$$

Ma questa è proprio l' equazione di ABEL [1], e la sua soluzione, come è ben noto, è data da

$$\frac{1}{\sqrt{t^3}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{F'\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

ossia, ritornando alle variabili originarie

$$\varphi(r) = \frac{r}{\pi}\frac{d}{dr}\int_r^{\infty} \frac{F'(\rho)d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - r^2}}.$$

Interessa in particolare ricordare che la soluzione è unica: non esistono due diverse funzioni $\varphi_1(r)$ e $\varphi_2(r)$ che corrispondano a una medesima distribuzione $F(\rho)$, o, in altre parole, non esiste una funzione $f(x, y) = \varphi(r) = \varphi_1(r) - \varphi_2(r)$ non identicamente nulla per la quale sia $\int f(x, y)ds = 0$ su una qualunque retta del piano. Da tale condizione di univocità ristretta (al campo delle sole funzioni della distanza dall' origine) scende però, in base a una semplice

(1) Cfr. ad es. G. VIVANTI, *Equazioni integrali lineari*, pagg. 93 e segg.

osservazione che faremo, la condizione di univocità incondizionata, e quindi la conclusione che se $f(x, y)$ non è costante sui cerchi $x^2 + y^2 = \text{cost.}$ essa non può soddisfare la condizione voluta.

Sia infatti $f(x, y)$ una funzione che abbia uguale ad $F'(\rho)$ l'integrale su qualunque retta a distanza ρ dall'origine; riferiamoci per comodità a coordinate polari, scrivendo $f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) = g(r, \theta)$. È evidente che la medesima condizione è soddisfatta allora anche per tutte le funzioni $g_\alpha(r, \theta) = g(r, \theta - \alpha)$ che si ottengono operando sul piano una rotazione attorno all'origine, operazione che lascia manifestamente inalterato il problema, ed ancora da tutte le combinazioni lineari del tipo

$$\bar{g}(r, \theta) = \Sigma \mu_h g(r, \theta - \alpha_h) \qquad (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 1)$$

o delle funzioni limite di funzioni di tale tipo, come ad es.

$$g^*(r, \theta) = \int_0^{2\pi} g(r, \theta - \alpha) d\alpha = \int_0^{2\pi} g(r, \theta) d\theta$$

che è funzione della sola r. Poichè l'unica funzione della sola r che risolve il problema è la $\varphi(r)$ determinata precedentemente, ne scende che $g^*(r, \theta) = \varphi(r)$; quindi: se il problema ammette soluzioni, ammette anche la soluzione del tipo $f(x, y) = \varphi(r)$. Tale soluzione è poi l'unica: perchè ne esistesse un'altra $g(r, \theta) \neq \varphi(r)$, sarebbe necessario e sufficiente infatti che la funzione $g(r, \theta) - \varphi(r) = \Psi(r, \theta)$ avesse integrale nullo su qualunque retta senza essere identicamente nulla. Ma essa, come si vede applicando il procedimento precedente che dà:

$$\Psi^*(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \Psi(r, \theta) d\theta = 0$$

deve aver nullo anche l'integrale esteso a un qualunque cerchio col centro nell'origine, e quindi — notando che in questo caso speciale la scelta dell'origine è *arbitraria* — dev'essere nullo l'integrale esteso *a qualunque cerchio*. Ciò che è impossibile se Ψ non è identicamente nulla, perchè se in un punto P è $|\Psi| = a > 0$) scelto un cerchietto nell'intorno di P in cui $|\Psi| > a/2$, si avrebbe un integrale certamente non nullo.

Si può osservare che questo ragionamento dimostra il teorema di *univocità* anche per il problema più generale seguente:

determinare una funzione f(x,y) *dei punti del piano in modo che l'integrale esteso alle diverse rette del piano assuma valori assegnati,* o analiticamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho \cos \alpha + s \operatorname{sen} \alpha,\ \rho \operatorname{sen} \alpha - s \cos \alpha)\, ds = \Phi(\rho,\ \alpha).$$

La soluzione, se esiste, è unica; non sembra però facile determinare le condizioni di esistenza. Comunque, tale forma più generale non ha alcun interesse per il nostro problema di calcolo delle probabilità, e basti quindi il segnalarla.

BRUNO DE FINETTI