Bruno de Finetti

Come, perchè, e in che senso la "ROVINA dei GIOCATORI è CERTA"

E' sembrato opportuno accompagnare l'articolo di Luigi Vannucci — che parla della rovina nel caso di tre o più giocatori — con un'esposizione elementare del caso più semplice di due giocatori (ricostruendo, più o meno, quella seguita in una conversazione al « Club matematico » circa dieci anni fa).

1. Il problema della « rovina »

Il teorema della « rovina dei giocatori » afferma che chiunque partecipasse indefinitamente a scommesse o giochi d'azzardo a condizioni *eque* (anche, cioè, senza l'aggravio del margine di guadagno, o « *caricamento* », generalmente previsto a favore del « banco ») finirebbe per rovinarsi, per quanto fosse grande il capitale destinato al gioco di cui inizialmente dispone. Beninteso, si deve supporre che detto « capitale destinato al gioco » sia isolato da entrate e uscite dovute a cause diverse dal gioco: introito di stipendi o interessi o guadagni ecc., spese per vitto, alloggio e tutto il resto. È ovvio infatti che, se vi si mescolassero questi fattori estranei, l'effetto dei guadagni o perdite al gioco risulterebbe mascherato e non più individuabile.

Cominceremo, per fissare le idee su di un esempio semplice e concreto, dal caso di Tizio e Caio che giocano tra loro a Testa e Croce, avendo all'inizio rispettivamente 3 Lire e 4 Lire: ad ogni colpo, Tizio vince (e riceve una Lira da Caio) se viene Testa, e, viceversa, Caio vince (e riceve una Lira da

Tizio) se viene Croce ([1]).

Con lo schema a pag. (traliccio dell'andamento del gioco e tabella delle probabilità ad ogni nodo) e le spiegazioni relative nel n. 2, si avrà un'idea concreta dell'andamento delle probabilità passo per passo, e in particolare di quelle di rovina.

Vedremo però nel seguito che le conclusioni apparse valide sull'esempio specifico hanno una validità assai più generale, e che è possibile darne una dimostrazione esauriente anche in forma elementare ed intuitiva.

2. L'esempio di Testa e Croce

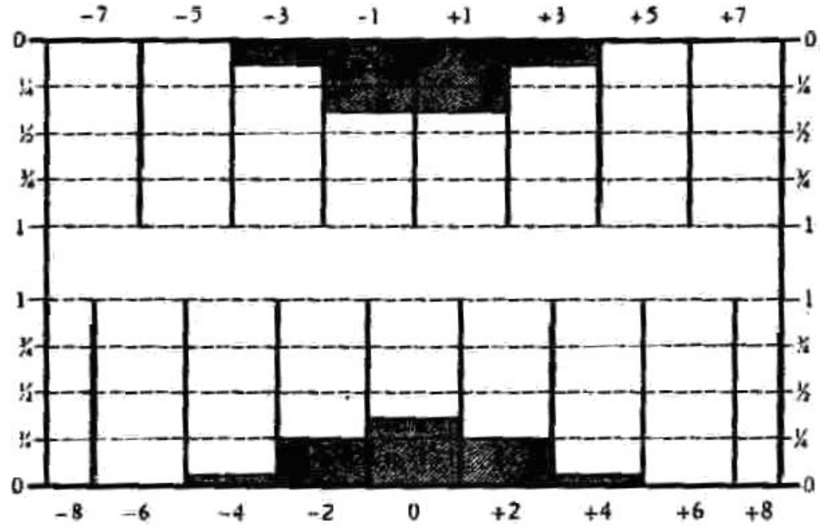
Lo schema e la tabella nella pagina di fronte permettono di seguire in modo chiaro e semplice l'andamento del gioco colpo dopo colpo: ad ogni colpo a Testa e Croce c'è probabilità 1/2 di spostarsi di una posizione verso destra o verso sinistra col guadagno e la perdita di una Lira rispettivamente per Tizio e Caio. È come se una pallina discendesse lungo le linee del reticolo, con probabilità uguale, ad ogni incrocio, di continuare a scendere nella stessa direzione o in quella opposta.

Una diversa immagine, traducibile nella costruzione effettiva di un apparecchio (Apparecchio di Bittering. v. figura) ([2]) mostra il medesimo processo per la diffusione di sabbia anziché di probabilità nel medesimo modo. Ogni volta che l'apparato viene capovolto la sabbia di ogni scompartimento si divide a metà fra i due scompartimenti contrapposti. Nel nostro caso, in cui, tenendo conto che con la rovina di uno dei giocatori il gioco ha termine, la sabbia degli scom-

([1]) E' comodo dire « una Lira », senza preoccuparsi di adeguamento a svalutazioni; chi ritenesse necessario, per fissare le idee, pensare su scala più realistica, potrà sostituirvi « una moneta da 100 Lire » o « un biglietto da 1.000 Lire » o un « Dollaro » od altra « unità » secondo la sua preferenza. Non sarebbe bello però fare del sarcasmo!

([2]) Tratta da B. de FINETTI, *Teoria delle probabilità*, ed Einaudi, 1970, fig. 5 di p. 369.

partimenti estremi (nel nostro esempio +4 e —3 come importi di Tizio, ossia —4 e +3 con riferimento a Caio) *non*



rientra nei successivi ribaltamenti, basterebbe pensare che gli scompartimenti corrispondenti fossero senza fondo e la sabbia destinata ad essi riempisse due recipienti come avviene, nella tabella, nelle colonne « Caio vince - Ha già vinto » e idem per Tizio.

Si tratta di giochetti divertenti anche per scolaretti, sempre istruttivi in molti sensi, e specialmente educativi se qualcuno dei ragazzi si arrangia a costruire l'apparecchio.

Quanto all'ultima riga della tabella, relativa al numero di colpi giocati ∞, è chiaro (e si può far notare) che si tratta di un valore asintotico (preferibilmente, senza usare tale termine; meglio ancora se, cogliendo l'occasione, si volesse spiegare elementarmente ma chiaramente cosa significhi). È anche chiaro che si sarebbe potuto determinarlo andando avanti con la tabella finché i due valori delle colonne « Caio (o Tizio) ha già vinto » dessero una somma praticamente uguale ad 1; ma si può farne a meno pensando che, il gioco essendo equo, il limite non può essere che 3/7 per Tizio e 4/7 per Caio.

3. Potenza e suggestività di ragionamenti semplici

È istruttivo, da una parte, soffermarsi sui dettagli nel modo più banale e diretto, come fatto finora, ma è ancor più istruttivo mostrare poi come dei concetti e ragionamenti semplici, ma che tali appaiono solo dopo che uno ci abbia pensato o sia stato portato da altri a pensarvi, possono portare a conclusioni molto più generali con poca fatica (e sia pure con una certa cautela per evitare generalizzazioni improprie, e. con prontezza nel far tesoro dell'esperienza se talvolta, come è naturale, si cade in sviste). Dice del resto il proverbio che « sbagliando s'impara » (pur di saperlo fare), e nulla sarebbe più diseducativo di un insegnamento che spingesse a considerare l'errore come cosa sacrilega da evitare anche a costo di non azzardare un passo in direzione dell'ignoto, di non nuotare mai senza salvagente, di non fare mai congetture o sogni o castelli in aria, di non inseguire mai utopie e chimere.

Un esempio di ragionamento semplice è quello già indicato per la determinazione della probabilità di rovina per Tizio e Caio (se il gioco si prolunga indefinitamente), basato sul concetto generico che, se ogni singolo colpo costituisce un gioco equo, tale è anche una sua ripetizione.

Un esempio semplice, relativo al nostro problema, consiste nel chiedersi dopo quanti colpi, « in previsione » o « in media », si raggiungerà la rovina. Un calcolo banale, diretto, si potrebbe anche fare, ma è sempre meglio cercare di farne a meno, ricordando la frase di Oscar Chisini secondo il quale « la matematica è *l'arte* che insegna a *non fare i conti* ». Si potrebbe anche dire che è l'arte del « saper vedere » (o addirittura del saper « ultravedere ») (3).

Il calcolo diretto obbligherebbe a sommare (la serie infinita de) i prodotti tipo $3\times128/1024$, $4\times64/1024$, $5\times95/1024$, ecc. del tipo hp_h dove p_h è la probabilità (v. tabella) di rovina dopo esattamente h colpi. Certo, anziché eseguire il calcolo

(3) *Il « saper vedere » in matematica* è il titolo che ho dato a un volumetto dedicato specialmente ai ragazzi (ove si sottolineano appunto gli aspetti intuitivi e suggestivi del ragionamento matematico); nel n. 11, parlando della visione « dinamica » dei problemi, si dice che essa consente di « ultravedere », moltiplicando — cioè — le capacità intuitive su cui tutto si basa. (Il volumetto è edito da Loescher, Torino, 1ª ed, 1967, 2ª ed. 1974; trad., tedesca, « *Die Kunst des sehens in der Mathematik* », ed. Birkhäuser, Basilea 1973).

Tabella delle probabilità delle diverse situazioni (dopo 1, 2..., 12 colpi) nel gioco di Testa e Croce (situazione iniziale — cfr. nel testo — risp. 3 Lire per Tizio e 4 per Caio). Per evitare al massimo valori non interi le probabilità sono espresse in 1024-esimi (cfr. all'inizio: tutta la probabilità — 1024/1024-esimi — è concentrata nella situazione 3 per Tizio e 4 per Caio). Si noti che le probabilità in millesimi sono approssimativamente le stesse; per l'esattezza basta ridurle del 2,3% circa.

Ogni probabilità, nella tabella, è la *semisomma* delle due sovrastanti (escluse quelle corrispondenti a vincita dell'uno e dell'altro, per cui il gioco non prosegue).

L'ultima riga ($n = \infty$) indica che la probabilità delle situazioni in cui il gioco prosegue tende a 0 mentre quelle di vittoria dell'uno o dell'altro sono risp. 3/7 per Tizio e 4/7 per Caio (in proporzione al capitale iniziale di ciascuno).

	Caio		Il gioco prosegue						Tizio		
	ha già vinto	vince							vince	ha già vinto	
	Lire in possesso di Tizio e di Caio										
colpi giocati	0 7	0 7	1 6	2 5	3 4	4 3	5 2	6 1	7 0	7 0	colpi giocati
	PROBABILITÀ (espresse in 1024-esimi)										
0					1024						0
1				512		512					1
2			256		512		256				2
3		128		384		384		128			3
4	128		192		384		256		64		4
5	128	96		288		320		128		64	5
6	224		144		304		224		64	64	6
7	224	72		224		264		112		128	7
8	296		112		244		188		56	128	8
9	296	36		178		216		94		184	9
10	352		89		197		155		47	184	10
11	352	44,5		143		176		77,5		231	11
12	396,5		72,5		109,5		173,5		38,75	231	12
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	..
∞	571,43	0	0	0	0	0	0	0	0	428,57	∞

numerico si potrebbe operare sulle formule, ma non ce n'è affatto bisogno.

Basta notare che la previsione di durata futura non dipende dalla durata trascorsa ma soltanto dalla situazione del momento: dal fatto cioè che i due competitori siano giunti alla situazione 7-0 (o 0-7) nel qual caso il gioco è finito e la durata ulteriore è *zero*, oppure alla 6-1 o 1-6), alla 5-2 (o 2-5) alla 4-3 (o 3-4). Un ragionamento immediato dice che (ad es.) la durata prevista nella situazione (5-2) è di un colpo più quella dei colpi ulteriori nelle due ipotesi (ugualmente probabili) di passare a (6-1) o a (4-3) a parole: ogni durata prevista è la semisomma delle due adiacenti più uno. Una funzione che gode di tali proprietà (ed anzi l'unica, come non sarebbe difficile dimostrare) è il prodotto del numero di Lire dei due competitori, e cioè:

$$0 \times 7 = 0 \quad , 1 \times 6 = 6, \qquad 2 \times 5 = 10, \qquad 3 \times 4 = 12$$

(e poi 12, 10, 6, 0, simmetricamente)

Era intuitivo che la fine del gioco dovesse apparire più prossima quanto più uno dei due si trovasse in « zona pericolosa », prossimo a restare « al verde », e il risultato conferma e precisa questa convinzione.

Ed è chiaro che il risultato (stabilito, per fissare le idee, riferendoci all'esempio precedente in cui siano in gioco 7 Lire) vale in generale: se sono in gioco n Lire, $n = r + s$ (r ed s risp. in possesso dell'uno e dell'altro giocatore), la durata ulteriore prevista è il prodotto rs. Risulta però più significativo, per avere una funzione di una sola variabile e mettere in chiaro che l'andamento è parabolico, esprimere il risultato in funzione della differenza $x = r - s$: allora infatti r ed s sono dati da $\frac{1}{2}(n \pm x)$ e il loro prodotto risulta

$$rs = \frac{1}{4}(n + x)(n - x) = \frac{1}{4}(n^2 - x^2).$$

4. Cenni ad ulteriori argomenti

Nello stesso ordine di idee, e in modo quasi altrettanto elementare, si può studiare il problema « della rovina dei giocatori » in casi più complessi, e molti aspetti e varianti, come ad es. il « problema dello scrutinio »: della probabilità, cioè, che quello tra due candidati diciamoli (ancora Tizio e Caio) che ha avuto la maggioranza dei voti diciamo r su n, $r > n - x$) si trovi sempre in testa durante lo scrutinio. È chiaro che ciò non avviene se la prima scheda scrutinata è un voto contrario, e tale fatto ha probabilità s/n (ponendo $s = n - r$ = numero dei voti contrari). Ma, per una geniale semplicissima osservazione di Désiré André, la probabilità di non essere stato sempre in testa pur essendo stata estratta per prima una scheda con voto favorevole *è la medesima*, s/n: infatti, ogni cammino che comincia con un voto favorevole ma non si mantiene sempre in vantaggio deve a un certo punto per lo meno annullarsi (toccare l'asse $y = 0$); ma ogni cammino del genere corrisponde univocamente a quello simmetrico (cambiato di segno) tra l'inizio e il successivo annullamento (il primo, se ve n'è più uno) e in seguito coincidente. In definitiva, quindi, la probabilità di non essere stato sempre in vantaggio è $2\,s/n$, e quella opposta, di essere stato sempre in vantaggio (mai neppure in parità dall'inizio al termine), è $1 - 2\,s/n = [(r + s) - 2\,s]/n = (r - s)/n$: è lo scarto di voti a suo favore diviso per il numero totale dei voti.

La figura riprodotta alla pag. seguente ([4]) dovrebbe bastare a rendere evidente il ragionamento, la conclusione, nonché la geniale semplicità del ragionamento di Désiré André (di cui questa è soltanto una delle più semplici tra le moltissime applicazioni).

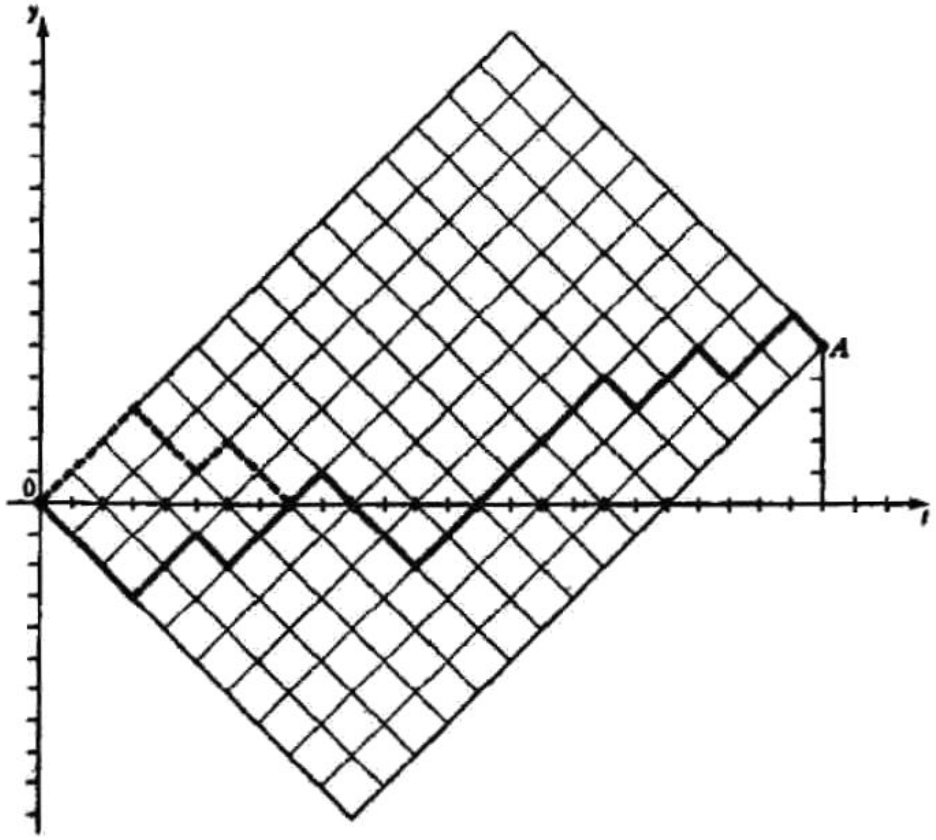
Molti sono infatti gli esempi, nel campo delle probabilità, che sono istruttivi e interessanti, oltre che in tale interpretazione, per la sorprendente facilità con cui, spesso, si prestano ad essere trasformati in forma diversa e facile, immediata o quasi, cogliendo qualche aspetto che si presta ad essere sfruttato in tale senso.

È opportuno osservare, infine, che la teoria delle probabilità, pur essendo la stessa per tutti in quanto teoria matematica formale, ha molte diverse interpretazioni: pressoché

([4]) La figura è riprodotta da *Teoria delle probabilità* (dell'a.), Einaudi 1970, pag. 485, per gentile concessione dell'Editore.

una diversa per ogni autore se si penetra nel profondo del significato, del valore, del fondamento, della nozione di probabilità e delle sue applicazioni nei campi più svariati.

Che essa abbia un significato soggettivo, personale, per ciascuno di noi (come grado di fiducia, di aspettativa, ecc., nell'avverarsi di un qualsiasi fatto, o « evento », in un campo qualsiasi: fatti politici, sportivi, meteorologici, ecc, ecc.) è fuori dubbio. Ma è in discussione l'alternativa tra il considerare valido solo tale aspetto personale, soggettivo, purché coerente (conforme ai principi della teoria, in tal senso necessari come condizioni di *coerenza* interna di ciascuno), e il pretendere che « esista » di per sé un qualcosa di « oggettivo » che potrebbe o dovrebbe esser considerato come « la *vera* » probabilità. Su tale punto basti qui averne fatto cenno (5).



(5) Al riguardo cfr. p. es. B. de FINETTI, « Probability: interpretations » (articolo nella « Internat. Encyclopedia of the Social Sciences », Macmillan-Free Press, 1968. E' in preparazione una 2ª ed. aggiornata dell'intera Enc., nonché un volume separato degli articoli concernenti *Probabilità e Statistica* a cura di W. H. Kruskal (Univ. Chicago).