LE FUNZIONI CARATTERISTICHE DI LEGGE ISTANTANEA DOTATE DI VALORI ECCEZIONALI

In: *«Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei»*, 1931, Vol. XIV, Fasc. 7-8, pp. 259-265

Matematica (Calcolo delle probabilità). — *Le funzioni caratteristiche di legge istantanea dotate di valori eccezionali.* Nota [1] di B. DE FINETTI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Scopo della presente Nota è di risolvere alcune questioni che avevo poste in una Nota precedente [2], e che si riferivano allo stesso argomento: quello di studiare i legami tra le *proprietà fisiche* di una *legge istantanea d'incrementi aleatori* [3] e la *forma analitica* della corrispondente *funzione caratteristica*. Osserviamo, per giustificare l'importanza della presente ricerca, che la conoscenza di detta forma analitica e del suo significato fisico è necessaria per proseguire nella risoluzione dei problemi pratici sull'argomento, che ho finora soltanto impostati [4].

Avevo dimostrato nella Nota precedente che le funzioni caratteristiche di legge istantanea (formalmente: le funzioni $\psi(t)$ tali che $\psi^{\lambda}(t)$ è, per ogni $\lambda > 0$, una funzione caratteristica [5]), sono tutte e sole le funzioni del tipo J:

$$e^{p[\chi(t)-1]} \quad \text{con} \quad p > 0 \quad , \quad \chi(t) \text{ funzione caratteristica,}$$

o del tipo J', delle funzioni limiti di funzioni del tipo precedente (considerando la convergenza uniforme in ogni intervallo finito). Dopo avere

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 agosto 1931.

(2) *Le funzioni caratteristiche di legge istantanea*, «Rend. Lincei», 1930, 2° sem.

(3) V. *Sulle funzioni a incremento aleatorio*, «Rend. Lincei», 1929, 2° sem.; cfr. anche: *Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge d'incrementi aleatori* e *Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio*, id. id.

(4) Cfr. *Le leggi differenziali e la rinunzia al determinismo*, «Rend. Sem. Mat. di Roma», Conferenza del 5 aprile 1930.

(5) Se $\Phi(\xi)$ è funzione reale mai decrescente, $\Phi(-\infty) = 0, \Phi(+\infty) = 1$, si dice *funzione caratteristica* corrispondente la $\psi(t) = \int e^{i\xi t} d\Phi(\xi)$ (integrale di SIELTJES); una funzione $\psi(t)$ si dice che è una funzione caratteristica se è ottenibile nel modo indicato da una Φ del tipo precedente.

anche dato un criterio per distinguere, fra le funzioni del tipo J', quelle del tipo (più particolare) J, terminavo accennando tre questioni che rimanevano aperte per esaurire lo studio del problema. Nella presente Nota vengono risolte due di queste tre questioni, e completata inoltre la precedente ricerca. Precisiamo brevemente i risultati. Considerata all'uopo la distribuzione di masse per un asse ξ individuata dalla funzione caratteristica $\psi^\lambda(t)$, sia $\Phi_\lambda(t)$ la funzione di ripartizione (= massa tra $-\infty$ e ξ, con che $\psi^\lambda(t) = \int e^{i\xi t} d\Phi_\lambda(\xi)$), e indichiamo con $\alpha(\lambda) = \Phi_\lambda(+0) - \Phi_\lambda(-0)$ la massa concentrata nell'origine. Avevo dimostrato che condizione caratteristica perchè una funzione J' sia una funzione J è che esista un $p > 0$ tale che $\alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$; dimostro ora che la semplice condizione $\alpha(\lambda) > 0$ (per ogni $\lambda > 0$) equivale alla precedente, e che, considerando la funzione caratteristica, ciò equivale a supporre $|\log \psi(t)|$ funzione limitata, ossia $|\psi(t)|$ limitata tra estremi positivi, od ancora $\frac{1}{t} \log \psi(t) \to 0$ per $t \to \infty$. Venendo alle due questioni nuove: quella di caratterizzare le funzioni (ovviamente del tipo J') prodotto di una funzione del tipo J per e^{ikt} (con k reale e $\neq 0$) è risolta dalla condizione $\frac{1}{t} \log \psi(t) \to ik$, e quella di caratterizzare le funzioni che individuano una distribuzione di masse con delle masse concentrate (in punti o valori eccezionali di ξ) è risolta riconoscendo che esse si identificano effettivamente colle precedenti, come avevo affermato presumibile.

1. Sia $\psi(t)$ una funzione del tipo J:

$$\psi(t) = e^{p[\chi(t)-1]} \quad \text{con} \quad \lim_{c \to \infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \chi(t)\, dt = 0,$$

come è sempre lecito supporre. Si sa allora che è $\alpha(\lambda) \geq e^{-p\lambda}$, e $\alpha'(0) = -p$. Abbiamo $|\log \psi(t)| = p\,|\chi(t) - 1| \leq 2p$ poichè, per ogni funzione caratteristica, è sempre $|\chi(t)| \leq 1$. Se $\psi(t)$ è del tipo J, è quindi $|\log \psi(t)|$ limitata, e il massimo è $\leq 2p$. Supponiamo inversamente $|\log \psi(t)| < k$, e quindi $|\log \psi^\lambda(t)| < k\lambda$. Avendosi [1] $|\log(1 + x)| \geq \log(1 + |x|)$, scende ancora $|\psi^\lambda(t) - 1| < e^{k\lambda} - 1$, e quindi

(1) Considerando infatti $u = \log z$ come vettore del piano complesso funzione del punto z, si ha $du^2 = 2u \times du$, $du = d \log z = \frac{dz}{z}$. Ponendo $z = Re^{i\varphi} = 1 + \rho e^{i\theta}$, ed eseguendo la derivazione lungo il cerchio $\rho =$ cost. si ha $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta = i(z - 1)\, d\theta$, e

$$\frac{du}{d\theta} = i\frac{z-1}{z} = i\left(1 - \frac{1}{R} e^{-i\varphi}\right) = -\frac{1}{R} \operatorname{sen} \varphi + i\left(1 - \frac{1}{R} \cos \varphi\right) \quad \text{mentre} \quad u = \log R + i\varphi.$$

Eseguendo il prodotto scalare $R\frac{du^2}{d\theta} = -\log R \operatorname{sen} \varphi + \varphi\,(R - \cos \varphi)$; si tratta di dimo-

$$1 - \alpha(\lambda) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} [1 - \psi^\lambda(t)]\, dt \leq \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} |1 - \psi^\lambda(t)|\, dt \leq$$

$$\leq (e^{k\lambda} - 1) \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} dt = e^{k\lambda} - 1 .$$

La condizione $\alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$ è soddisfatta; osservando che basta naturalmente supporla verificata in un intorno a destra di $\lambda = 0$, si può addirittura concludere che $p = \alpha'(0) \leq k$. E concludiamo: condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione J' sia una funzione J è che $|\log \psi(t)|$ sia limitata; il massimo di $|\log \psi(t)|$ è poi compreso tra p e $2p$.

La condizione equivale anche a $\frac{1}{t} \log \psi(t) \to 0$ per $t \to \infty$. Tale asserzione cadrebbe in difetto nel solo caso che, per qualche valore di t, $|\log \psi(t)|$ diventasse infinito, e vedremo che ciò è impossibile. Non può infatti $|\psi(t)|$ diventare infinito, essendo per ogni funzione caratteristica $|\psi(t)| \leq 1$, e non può nemmeno annullarsi, trattandosi di una funzione caratteristica di legge istantanea. Supponendo infatti $\psi(t) = 0$, sarebbe $\psi^\lambda(t) = 0$ per ogni $\lambda > 0$, mentre che, per $\lambda \to 0$, $\psi^\lambda(t)$ deve tendere uniformemente ad 1 in ogni intervallo limitato (1).

2. Sia ora $\psi(t)$ prodotto di e^{ikt} per una funzione $\bar{\psi}(t)$ del tipo J; per $t \to \infty$ avremo $\frac{1}{t} \log \psi(t) = \frac{1}{t}\, ikt + \frac{1}{t} \log \bar{\psi}(t) \to ik$. E inversamente, se $\frac{1}{t} \log \psi(t) \to ik$, posto $\bar{\psi}(t) = \psi(t)\, e^{-ikt}$ si ha che $\frac{1}{t} \log \bar{\psi}(t) \to 0$, $\bar{\psi}$ è una funzione J, e ψ è il prodotto di e^{ikt} per una funzione J. La seconda questione è pertanto immediatamente risolta.

3. Passiamo infine a dimostrare che le funzioni caratteristiche di legge istantanea $\psi(t)$ che ammettono dei valori eccezionali sono tutte e sole le

strare che tale derivata è sempre positiva per $0 < \varphi < \pi$. Distinguiamo tre casi: $R < \cos\varphi$, $\cos\varphi < R < 1$, $R > 1$. Nel 2° caso i due termini sono positivi; nel 1° caso è negativo il II termine, ma prevale il segno positivo del I:

$$-\varphi\,(R - \cos\varphi) < \operatorname{tg}\varphi\,(\cos\varphi - R) < (1 - R)\operatorname{sen}\varphi < -\log R \operatorname{sen}\varphi ;$$

nel 3° caso è negativo il I termine, ma prevale il segno positivo del II:

$$\varphi\,(R - \cos\varphi) > \operatorname{sen}\varphi\,(R - \cos\varphi) > (R - 1)\operatorname{sen}\varphi > \log R \operatorname{sen}\varphi .$$

Non so se questa disuguaglianza sia nota, e se esistano dimostrazioni più elementari.

(1) Ciò sembra evidente per il significato della questione nella teoria delle funzioni a incremento aleatorio, ma sarebbe bene dimostrarlo. Una dimostrazione immediata si ha supponendo finito lo scostamento quadratico medio

Non volendo usare di questa proprietà, non ancora dimostrata, il criterio che daremo al n. 2 va completato aggiungendo che $|\log \bar{\psi}(t)|$ deve risultare limitato.

funzioni del tipo $e^{ikt}J$. Che una funzione caratteristica del tipo $e^{ikt}J$ ammetta sempre almeno il valore eccezionale $\xi = k$ è ovvio; meno agevole è dimostrare inversamente che se una funzione caratteristica di legge istantanea $\psi(t)$ ammette un valore eccezionale, essa è del tipo predetto.

Dobbiamo richiamare qualche proprietà, Se ψ_1 e ψ_2 sono funzioni caratteristiche, la funzione caratteristica $\psi_1\psi_2$ ammette dei valori eccezionali se e soltanto se tanto ψ_1 che ψ_2 ne ammettono; in tal caso i valori eccezionali di $\psi_1\psi_2$ sono i valori del tipo $\xi_1 + \xi_2$ ove ξ_1 è valore eccezionale per ψ_1 e ξ_2 per ψ_2. La massa concentrata in un valore eccezionale ξ di $\psi_1\psi_2$ è $\Sigma_h p_h q_h$ ove p_h è la massa concentrata nel valore eccezionale ξ_h relativo a ψ_1 e q_h quella di $\xi - \xi_h$ relativa a ψ_2 ($q_h = 0$ se $\xi - \xi_h$ non è valore eccezionale per ψ_2). Ne scende che la massima massa concentrata relativa a $\psi_1\psi_2$ è non maggiore della massima massa concentrata di ψ_1 nè di quella di ψ_2, e che, essendo P e Q la somma delle masse concentrate relative a ψ_1 e ψ_2 è PQ la somma delle masse concentrate relative a $\psi_1\psi_2$. Nel nostro caso, in cui si considerano le potenze ψ^λ, si ha in particolare che il totale delle masse concentrate relative a ψ^λ è della forma $e^{-s\lambda}$ con s costante; appare poi [1] che di valori eccezionali ce n'è o nessuno, o uno solo, o un'infinità numerabile (mentre per altre funzioni caratteristiche, non di legge istantanea, se ne potrebbe anche avere un numero finito qualunque).

Cominciamo dal caso che ψ sia funzione pari, $\psi(-t) = \psi(t)$, ossia che la distribuzione di masse che essa individua sia simmetrica:

$$\Phi(-\xi) = 1 - \Phi(\xi);$$

allora anche ψ^λ è pari, ossia $\Phi_\lambda(\xi)$ legge simmetrica, qualunque sia λ. Tra i valori eccezionali figura certamente, qualunque sia λ, l'origine $\xi = 0$, perchè se ξ_0 è valore eccezionale di $\psi^{\frac{1}{2}\lambda}$, lo è anche $-\xi_0$, per l'ipotesi della simmetria, e per $\psi^\lambda = \psi^{\frac{1}{2}\lambda} \cdot \psi^{\frac{1}{2}\lambda}$ si ha così il valore eccezionale $\xi_0 - \xi_0 = 0$. È anzi nell'origine che si ha la massima massa concentrata: dette p_h le masse concentrate nei singoli valori eccezionali ξ_h relativi a $\psi^{\frac{1}{2}\lambda}$, tale massa, che già abbiamo indicato $\alpha(\lambda)$, è $\Sigma_h p_h^2$, manifestamente non minore di qualunque altra somma di prodotti $\Sigma_h p_h p_{r_h}$; poichè la massima massa concentrata diminuisce moltiplicando fra loro delle funzioni caratteristiche, scende poi che $\alpha(\lambda)$ è funzione non crescente.

Sia ora ξ_h un valore eccezionale per ψ^{λ_0}; esso è ovviamente valore eccezionale anche per ogni ψ^λ con $\lambda > \lambda_0$ (essendo zero un valore eccezionale per $\psi^{\lambda-\lambda_0}$). I valori eccezionali di ψ^λ fanno quindi parte di un'infinità nu-

(1) Cfr. Nota cit. *Sulla probabilità* ecc., p. 328, nota in calce.

merabile di valori $\xi_0 = 0\,, \pm\,\xi_1\,, \pm\,\xi_2\,, \cdots, \pm\,\xi_n\,, \cdots$ indipendenti da λ, ed è quindi

$$\psi^\lambda(t) = \alpha(\lambda) + \sum_{1}^{\infty}{}_h p_h(\lambda)\left[e^{i\xi_h t} + e^{-i\xi_h t}\right]$$

ove $p_h(\lambda)$ è la massa concentrata in ξ_h (e in $-\xi_h$) relativa a ψ^λ.

+ la parte (che non interessa) relativa a un'eventuale distribuzione residua continua

Ci proponiamo ora di dimostrare che per $\lambda \to 0$ è $\alpha(\lambda) \to 1$. Essendo $\alpha(\lambda) + 2\Sigma_h p_h(\lambda) = e^{-s\lambda}$ la somma delle masse concentrate, ciò equivale a dimostrare che $\Sigma_h p_h(\lambda) \to 0$. Ogni singola $p_h(\lambda)$ tende certamente a zero, perchè la massa concentrata in un punto assegnato ξ_h, considerata come funzionale di $\Phi, 0$, il che non cambia nulla, di ψ, è semicontinua superiormente; ciò significa che se una funzione caratteristica variabile converge verso una funzione caratteristica fissa, questa determina in ξ_h una massa concentrata non minore del limite della massa concentrata nello stesso punto relativa alla funzione variabile. Nel nostro caso, dato che, per $\lambda \to 0$, $\psi^\lambda \to 1$, e la funzione caratteristica $\equiv 1$ non ha altri valori eccezionali che l'origine ove è concentrata tutta la massa, si ha $p_h(\lambda) \to 0$. Però le $p_h(\lambda)$ sono un'infinità numerabile, e per poter concludere che è anche $\Sigma p_h(\lambda) \to 0$ occorre una nuova osservazione. Fissiamo un ε piccolo a piacere, e un valore arbitrario di λ, ad es. $\lambda = 1$; essendo $\Sigma_h p_h(1)$ convergente, esisterà un N tale che $\sum_{N+1}^{\infty}{}_h p_h(1) < \varepsilon \cdot \alpha(1)$. Per ogni $\lambda < 1$ avremo $p_h(1) \geq p_h(\lambda)\,\alpha(1-\lambda) \geq p_h(\lambda)\,\alpha(1)$ e quindi $\sum_{N+1}^{\infty}{}_h p_h(\lambda) < \varepsilon$. Ma $\sum_{1}^{N}{}_h p_h(\lambda) \to 0$, e quindi, pur di prendere λ sufficentemente piccolo, sarà $\sum_{1}^{N}{}_h p_h(\lambda) < \varepsilon$, $\sum_{1}^{\infty}{}_h p_h(\lambda) < 2\varepsilon$. Quindi $\sum_{1}^{\infty}{}_h p_h(\lambda) \to 0$, $\alpha(\lambda) \to 1$, c. v. d.

Rimane a provare che $\alpha(\lambda)$ tende a 1 in modo che esiste p tale che $\alpha(\lambda) \geq 1 - p\lambda$; avremo allora dimostrato (limitatamente al caso simmetrico) che la condizione $\alpha(\lambda) > 0$ equivale alla condizione $\alpha(\lambda) \geq 1 - p\lambda$ con $p > 0$. La composizione dei valori eccezionali di ψ^λ e ψ^μ dà per la massa relativa a $\psi^{\lambda+\mu}$ concentrata nell'origine il valore

$$\alpha(\lambda + \mu) = \alpha(\lambda)\,\alpha(\mu) + 2\Sigma_h p_h(\lambda)\,p_h(\mu) \leq \alpha(\lambda)\,\alpha(\mu) +$$
$$+\ 2[\Sigma_h p_h(\lambda)]\,[\Sigma_h p_h(\mu)] \leq \alpha(\lambda)\,\alpha(\mu) + \frac{1}{2}[1 - \alpha(\lambda)]\,[1 - \alpha(\mu)]\,.$$

L'equazione funzionale

$$\varphi(\lambda + \mu) = \varphi(\lambda)\,\varphi(\mu) + \frac{1}{2}[1 - \varphi(\lambda)]\,[1 - \varphi(\mu)]\,,$$

potendosi anche scrivere

$$\left\{\frac{3}{2}\varphi(\lambda+\mu)-\frac{1}{2}\right\}=\left\{\frac{3}{2}\varphi(\lambda)-\frac{1}{2}\right\}\left\{\frac{3}{2}\varphi(\mu)-\frac{1}{2}\right\}$$

si riduce così a una forma nota che dà

$$\frac{3}{2}\varphi(\lambda)+\frac{1}{2}=e^{-c\lambda} \quad , \quad \varphi(\lambda)=\frac{1}{3}\{1-2e^{-c\lambda}\}.$$

L'analoga disuguaglianza per α assicura che, preso λ_0 in modo che $\alpha(\lambda_0)>\frac{1}{3}$ (ciò che è possibile poichè sappiamo che $\alpha(\lambda)\rightarrow 1$), e determinato c dalla relazione $\alpha(\lambda_0)=\frac{1}{3}(1+2e^{-c\lambda_0})$, deve aversi in particolare, per ogni λ del tipo $2^{-n}\lambda_0$, $\alpha(\lambda)\geqq\frac{1}{3}\{1-2e^{-c\lambda}\}>1-\frac{2}{3}c\lambda$. La disuguaglianza $\alpha(\lambda+\mu)\geqq\alpha(\lambda)\alpha(\mu)$ rende poi manifesto che se la disuguaglianza $\alpha(\lambda)>1-p\lambda$ sussiste per un insieme di valori con limite inferiore nullo (come avviene nella precedente dimostrazione), essa vale per ogni λ. Si osservi che tale dimostrazione rende inutile la precedente quando si sappia che è, per almeno un valore λ, $\alpha(\lambda)>\frac{1}{3}$: allora essa mostra infatti che $\alpha(\lambda)\rightarrow 1$. Ma essa non basta invece ad escludere che possa essere sempre $0<\alpha(\lambda)<\frac{1}{3}$.

4. Con ciò la trattazione del caso simmetrico è esaurita, stabilendo effettivamente i risultati enunciati; estendiamo ora le precedenti conclusioni al caso generale. Essendo $\psi^{\lambda}(t)$ una funzione caratteristica di legge istantanea dotata di valori eccezionali, lo è certamente anche $\psi^{\lambda}(t)\psi^{\lambda}(-t)$ che è funzione pari, e che determina quindi una distribuzione di masse che ha nell'origine una massa concentrata $\alpha(\lambda)$, tendente a 1 per $\lambda\rightarrow 0$. Sia λ_0 tale che $\alpha(\lambda_0)>a\equiv\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$; anche la massima massa concentrata di ψ^{λ_0} dev'essere allora $>a$, e sia essa concentrata nel punto $\xi=\xi_0$. Anche $\psi^{\frac{1}{2}\lambda_0}$ deve avere una massa concentrata $>a$, e si vede facilmente che essa non può che essere concentrata nel punto $\xi_1=\frac{1}{2}\xi_0$. Infatti nel punto $2\xi_1$ la legge ψ^{λ_0} ha una massa concentrata $>a^2$, e avendosi $a^2+a=1$, si avrebbe concentrata nei due punti, supposti distinti, una massa >1, il che è assurdo.

Così procedendo si vede che per $\lambda=2^{-n}\lambda_0$ la massa concentrata nel punto $\xi=\frac{\lambda}{\lambda_0}\xi_0$ è $>a$, e ciò vale anche per qualunque altro $\lambda<\lambda_0$.

Vale ad es. per $\lambda = \frac{3}{4}\lambda_0$, avendosi in $\frac{3}{4}\xi_0 = \frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{4}\xi_0$ una massa $> a^2$, e dovendosi avere d'altra parte almeno una massa concentrata $> a$, che non può essere altrove. Collo stesso ragionamento la proprietà si estende ad ogni $\lambda = m 2^{-n}\lambda_0 < \lambda_0$, e quindi a ogni $\lambda < \lambda_0$ per la semicontinuità superiore di cui gode tale massa come funzionale di $\bar{\psi}^\lambda(t)$ (definito qui appresso), e quindi anche come funzione di λ (1).

Si ha, concludendo, una retta $\xi = \frac{\lambda}{\lambda_0}\xi_0$ di valori eccezionali per $\psi^\lambda(t)$, e ci si riduce, considerando $\bar{\psi}^\lambda(t) = \psi^\lambda(t) \cdot e^{-i\frac{\lambda}{\lambda_0}\xi_0 t}$, al caso in cui si tratti della retta $\xi = 0$. Inoltre la massa $\bar{\alpha}(\lambda)$ concentrata in $\xi = 0$ relativa a $\bar{\psi}^\lambda(t)$ è, per $\lambda < \lambda_0$, non minore dell'analoga massa $\alpha(\lambda)$ relativa alla funzione pari $\bar{\psi}(t)\bar{\psi}(-t) = \psi(t)\psi(-t)$, ed è quindi $\bar{\alpha}(\lambda) > \alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$, $\bar{\alpha}(\lambda) > 1 - p\lambda$, c. d. d.

(1) Dal ragionamento precedente segue: condizione caratteristica delle funzioni J è che sia, per almeno un λ, $\alpha(\lambda) > \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \cong 0.618$. Tale limite numerico si può verosimilmente migliorare, e credo si potrebbe ridurre ad $e^{-1} = 0.368$; questo è infatti il massimo valore di una massa concentrata diversa dalla principale nel caso che mi sembra debba essere il più sfavorevole in proposito ($\max p_1(\lambda)$: cfr. la nota cit. *Sulla probabilità* ecc., p. 328).