Bruno de Finetti

# Tre direzioni di APPROFONDIMENTO

*Conversazione alla Mathesis, Roma, su tre direttrici raccomandabili per migliorare l'efficacia dell'insegnamento sia in generale, e sia, in modo particolare, per la matematica.*

## 1. Le tre direzioni

Prendendo lo spunto da tre (o quattro) recenti pubblicazioni, sembra opportuno riflettere sugli insegnamenti che da esse si possono trarre (e che è auspicabile siano abbondantemente e profondamente tratti) riguardo al modo in cui la matematica potrebbe essere fatta apparire ricca di idee e spunti d'ogni genere, riguardanti sia la sua storia, sia le sue applicazioni, sia la comprensione del perchè le spetti un alto valore educativo nell'obbligare a veridicità e chiarezza contro ogni sofisma superstizione o imbroglio.

Il primo dei libri da menzionare sarà quello di

**Bruno Spotorno e Vinicio Villani**
**MONDO REALE E MODELLI MATEMATICI**
**La Nuova Italia ed., Firenze, 1976**

che illustra in modo sorprendentemente ricco e chiaro quella che è (a mio avviso) la prima e principale esigenza, la prima « direzione di approfondimento » che sarebbe doveroso venisse curata da tutti gli insegnanti (specie di matematica) in ogni tipo di scuole. Si tratta della direzione che vorrei dire *« istruttivamente didattica »*, che, procedendo più « per problemi » che per « teorie », e curando gli aspetti che contano nella scienza e nella pratica (ad es. il grado di approssimazione ottenibile e/o desiderabile e ragionevolmente indicabile) guida i ragazzi alla cosa più indispensabile ma più difficile e più trascurata: al « buon senso » matematico (o, se si vuole, « matematico-applicativo », il che, a mio avviso, significa « matematico sul serio »).

Il secondo libro su cui ci soffermeremo è quello di

**Carlo Felice Manara e Gabriele Lucchini**
**MOMENTI DEL PENSIERO MATEMATICO**
**Mursia ed., Milano 1976**

che presenta, in traduzione italiana, brani significativamente scelti di opere di ventisei tra i matematici più rappresentativi di diverse epoche (da Platone a Hadamard) e tendenze (da Archimede a Cantor) insieme a una prefazione (seguita da un articolo di Federigo Enriques).

Esso dà ampi spunti per la direzione che vorrei dire « *istruttivamente storica* », che chiarisce il valore e il perchè delle varie scoperte nelle diverse epoche in concomitanza con esigenze interiori ed esteriori di rinnovamento del pensiero.

La terza delle « direzioni di approfondimento » potrà essere esemplificata dal volume

**Emma Castelnuovo e Mario Barra**
**MATEMATICA NELLA REALTA'**
**Boringhieri ed., Torino 1976**

(di cui già si parla altrove in questo stesso fascicolo) che da un articolo (che pure vi figura):

**David Hawkins**
**RENDERE CAPILLARE**
**IL CONTATTO CON LA REALTA'**

Si tratta, qui, della direzione che vorrei dire « *istruttivamente rapsodica* » (o forse « monografica ») che consiste nel prospettarsi specifici problemi — o, per dire meglio, problematiche — interessanti di per se (per motivazioni vuoi matematiche che, più spesso, extramatematiche) e nello sviluppare man mano gli strumenti matematici che appaiono rispondenti alle esigenze dei vari studi in argomento.

## 2. La via « istruttivamente didattica »

Nell'intento di illustrare queste diverse « direzioni » sarà certo assai meglio dare la parola agli Autori delle opere citate, lasciando al sottoscritto compilatore soltanto il compito di scegliere i passi che ritiene più significativi ([1]) e il privilegio di poter far trasparire di quando in quando qualche posizione personale su dati punti.

Quanto agli Autori, conosco ed apprezzo da tempo Villani e Spotorno, risp. Presidente e Membro della Commissione Italiana per l'Insegnamento Matematico (di cui ho l'onore di far parte) ma confesso che non avrei saputo immaginare ed attendermi un libro così ricco di idee, proposte, critiche, osservazioni, ispirate al medesimo grado di chiarezza e saggezza ovunque, dalle grandi linee ai dettagli spesso da molti snobbati e degni invece di tutta la cura possibile.

Fin dall'inizio (p. 2) vengono elencate le tre risposte alla domanda « perchè insegnare la matematica? », ossia le diverse concezioni che ne ispirano l'insegnamento, secondo vedute correnti.

> « Prima ipostazione: *la matematica ha un ruolo prevalentemente* utilitaristico, *e quindi fine del suo insegnamento è la preparazione dei tecnici del domani.*
>
> Seconda impostazione: *la matematica è il tipico esempio di sistema* ipotetico-deduttivo *e quindi il suo studio è necessario per imparare a "pensare correttamente" in termini di astrazione e di deduzione.*
>
> Terza impostazione: *la matematica è il più efficace* strumento di analisi del mondo reale *e quindi fine del suo insegnamento è addestrare i giovani ad interpretare e a costruire modelli matematici della realtà* ».

---

(1) Tali citazioni sono fedeli all'originale, salvo qualche abbreviazione o piccoli adattamenti grammaticali occorrenti per l'inserimento nel contesto.

La posizione degli AA. (e condivisa toto corde del compilatore) è quella che traspare già dal titolo del volume, ed é così esposta (a p. 3):

> « ... *noi riteniamo che la terza impostazione sia preferibile alle altre due, non foss'altro per ragioni inerenti alla psicologia degli allievi, e che la nostra esperienza di insegnamento sembra convalidare: se è vero infatti che per un "tecnico" una corretta e lucida descrizione di metodi standardizzati può costituire l'optimum per un'efficiente preparazione professionale, o che per un "cultore di scienze umane" può essere più soddisfacente contemplare una elegante costruzione ipotetico-deduttiva, è altrettanto vero che in genere nel giovane prevalgono la curiosità, la fantasia, il desiderio di autoaffermazione nell'interpretazione del mondo; di conseguenza egli è portato naturalmente a preferire le metodologie didattiche che valorizzano l'aspetto* euristico *piuttosto che quello* logico-deduttivo, *o che, avendo di mira solo* aspetti tecnici, *limitano e restringono eccessivamente il campo dei suoi interessi.*

Il danno e l'impoverimento intellettuale e pratico derivante da una diversa scelta (prima o seconda alternativa), cioè dal dare (in forme diverse ma da tal punto di vista equivalenti) un « prodotto finito » da applicare nel modo prescritto è immenso. Ed allora (p. 4)

> « ... *non resterà dunque ad entrambi la possibilità di aprire uno spiraglio al* dubbio critico *o di lasciar intravvedere* possibili alternative. *In opposizione a questo tipo di didattica, necessariamente* statica, *la terza impostazione porta con sé un atteggiamento dell'insegnante, che potremmo dire* dinamico: *egli infatti cercherà di* far scoprire direttamente agli allievi le schematizzazioni matematiche più adeguate ad interpretare una determinata serie di osservazioni; *il suo sarà insomma un insegnamento* per problemi *piuttosto che un insegnamento* per teorie ».

Dopo aver riportato e commentato, riguardo all'idea di un *insegnamento per problemi* (1), citazioni di G. Polya, A. Z. Krygowska, B. de Finetti, G. Prodi, riguardo ai metodi di controllo del profitto viene proclamato un principio sacrosanto abitualmente ignorato o rifiutato. Così è detto al ri-

---

(1) Segnaliamo, a tal proposito, i *Problemi di gare Matematiche* di Bruno Rizzi, Quaderni del P.d.M. N. 1. Un altro quaderno sullo stesso argomento è in corso di stampa.

guardo (p. 14):

> « *L'essenziale è che si proceda valorizzando al massimo le capacità di critica e di sintesi degli allievi, e pretendendo la padronanza del tecnicismo matematico solo dove non se ne può fare a meno* ».

Un esempio banale ma fondamentale e significativo: non è l'esecuzione formalmente corretta dei calcoli che conta: si deve (p. 14)

> « ... *porre invece più attenzione là dove occorre una chiara consapevolezza dell'ordine di precisione dei risultati ottenuti. Analogamente, non vi sarà nulla di male se gli allievi utilizzeranno libri o prontuari per rintracciarvi le formule meno immediate; sarà invece importante che essi sappiano manipolare ed applicare correttamente tali formule, nelle ipotesi appropriate* ».

Viene ad es. segnalato, come errore consueto, quello di ritenere che calcolando $\pi\sqrt{2}$ col prodotto di 3,14 e 1,41 ( = 4,42) si ottenga il risultato con due decimali esatte (anziché partire da valori per difetto e per eccesso, con abbastanza decimali perché i primi due risultino certi).

Ciò è detto in un gustoso paragrafo (pp. 16-18) in cui si raccomanda: 1) Non insegnare cose troppo difficili, e, 2) Non insegnare cose troppo ovvie. Esempio di (1), niente della cosiddetta « teoria dei razionali » (inutile contorsione da quando esiste la scrittura decimale, e basta accennare al fatto che i razionali sono definitivamente periodici), ispirata, come è detto splendidamente, alla pretesa « *esigenza di un rigore così esasperato (e, sia detto per inciso, anche un pò farraginoso)* ». A questo punto non posso trattenermi dall'inserire al riguardo una banale osservazione del compilatore: dicendo che un numero reale (ad es. pigreco) è dato da una scrittura decimale illimitata — ed è cioè l'elemento divisorio tra tutte le scritture decimali arrestate (risp. per difetto e per eccesso) all'n-esima decimale — si dà esattamente la stessa definizione che infarcendo le due riverite « classi contigue » con frazioni di denominatori non potenze di 10.

Come esempio di (2), a quelli citati degli AA. (di « *capitoli che si riducono, agli occhi dei ragazzi, ad una sequela di banalità, con l'inevitabile conseguenza dell'ingenerarsi del convincimento che la matematica sia una scienza creata ap-*

*posta per la complicazione delle cose semplici!* » (p. 17)), val la pena di proporre l'inserzione di questa sullodata « definizione » dei numeri reali!

Sull'opportunità di insistere su aspetti statistici, e probabilistici, sull'incertezza e l'approssimazione (come reazione ai difetti denunciati) è superfluo che un probabilista si dica d'accordo, più che d'accordo (cfr. (I) e (II) a p. 20). In tema di « esattezza fittizia », si nota (p. 62) che l'indicazione di km/h 37,233 come velocità media del vincitore della Milano-Sanremo presupporrebbe di aver misurato la lunghezza del percorso con margine di 5 m.

Viene suggerito (a p. 20) di « condurre la lezione » come dialogo

> «... *condurre la "lezione" come dialogo, come discussione fra allievi e insegnante e fra allievi e allievi, aperta quindi all'iniziativa dei singoli componenti la classe. Se la lezione è essenzialmente discussione, può avvenire che in essa trovino posto fatti occasionali, curiosità destate per associazione di idee, analogie che rendano il cammino meno rettilineo di come si era previsto. Malgrado il rischio di una eccessiva dispersione, noi riteniamo che questi spunti occasionali non debbano essere lasciati cadere, e siano anzi ben più preziosi delle nostre annotazioni che, inevitabilmente, risentono della nostra "deformazione professionale" di matematici. Anche se talvolta l'insegnamento sarà a "zig-zag", esso tuttavia costituirà un autentico momento di "crescita culturale" dei giovani, purché, come si è già detto, l'insegnante sappia imprimere un coerente orientamento di massima al suo lavoro; ci sembra che le due* idee guida *da tenere costantemente presenti, possano essere sintetizzate come segue.*
>
> *I) Viviamo in un mondo dove l'incertezza domina le nostre azioni:* le nostre certezze sono "vere" solo in senso probabilistico.
>
> *II) Spiegare i fatti di questo mondo significa inserirli in* teorie organiche, *che saranno tanto più significative quanto più saranno generali* ».

Due degli esempi (con discussione sull'approssimazione appropriata) riguardano la visibilità di una nave e la velocità di un satellite; entrambi si riducono al teorema di Pitagora $(R + h)^2 = R^2 + d^2$ ($R$ = raggio terrestre, $d$ ed $h$ distanza ed altezza di un punto) con appropriate approssimazioni per $h$ piccolo, e calcoli istruttivi specie per la necessità di tener conto di *questioni dimensionali* (che non dovrebbe mai esser tollerato dimenticare o peggio ignorare: del « puro numero » si può dire — con eccessiva enfasi — che « non esiste » salvo come rapporto di grandezze omogenee).

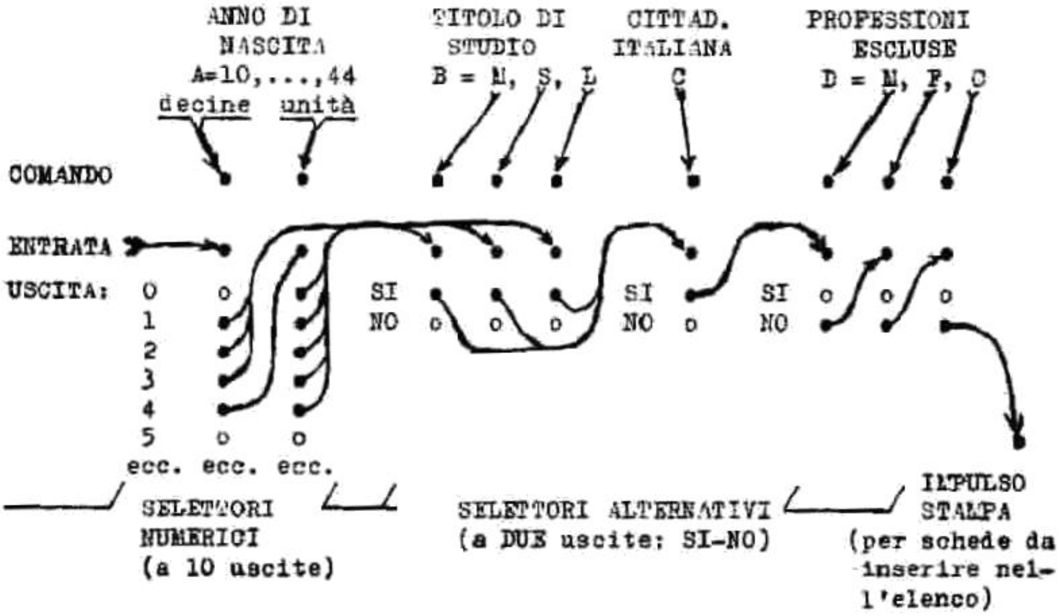
Per finire ecco come si può dare in forma concreta e istruttiva un esempio di impiego nelle notazioni insiemistiche. Con la formula

$$E = [(A_{10} \cup A_{11} \cup \cdots \cup A_{44}) \cap (B_M \cup B_S \cup B_L) \cap C_I] \cap$$
$$\cap \backsim (D_M \cup D_P \cup D_C)$$

viene indicato sinteticamente il complesso di requisiti necessari e sufficienti perché un cittadino, in base alle leggi vigenti, risulti « sorteggiabile nelle giurie popolari ».
[A: nati nell'anno da 1910 a 1944; B: titolo di studio; C: cittadinanza; D: professione (esclusi magistrati, militari, add. culto].

La formula ha valore *operativo*, in quanto indica le selezioni da eseguire se i dati di ogni cittadino vengono registrati su una scheda perforata. [A parte che, ad es., le selezioni ad A si riducono a due (su unità e poi decine) con una scheda divisoria a 10 (primo anno incluso) ed a 5 (primo anno escluso].

Gli AA accennano all'uso di una selezionatrice, ed è già cosa praticamente istruttiva (ma un po' farraginosa); sarebbe più semplice e significativo indicare lo schema di concessioni (in una macchina a relé; concettualmente il medesimo che per una macchina elettronica ma più concretamente « visibile ») affinché, facendo passare tutto lo schedario nell'ordine abituale (p. es. alfabetico), venga stampato l'elenco di tutti e soli i cittadini coi requisiti previsti (cfr. schema e spiegazioni a fianco).




**SCHEMA PER LA SELEZIONE AUTOMATICA NELLA STAMPA DELL'ELENCO DI CITTADINI « SORTEGGIABILI » (LE SCHEDE DI QUELLI PER CUI LA MACCHINA ACCERTA AUTOMATICAMENTE LA MANCANZA DI ALMENO UNO DEI REQUISITI PASSANO SENZA VENIR STAMPATE.**

## Spiegazione

Lo schema si riferisce al procedimento in cui le schede (perforate: i fori indicano le cifre o anche lettere ivi registrate) vengono lette e stampate automaticamente da una macchina stampatrice. (In genere si tratta di macchine che, inoltre e soprattutto, per altri tipi di lavori, eseguiscono anche somme od altre operazioni sui dati perforanti, ma qui tali capacità non vengono sfruttate).

I dati fatti leggere dalle perforazioni della scheda posizionano un dispositivo di stampa che funziona se riceve un impulso (che viene emesso ad ogni ciclo): quello che, nello schema, dovrebbe collegare l'inizio e la fine del collegamento da « ENTRATA » a « IMPULSO STAMPA ». Se ci fosse un collegamento diretto (un unico filo — qui linea nera — fra il punto iniziale e quello finale) verrebbe stampato il contenuto di tutte le schede. Volendo limitarsi a quelle soddisfacenti e certe condizioni (come nel nostro caso) si fa in modo che il collegamento sia interrotto quando tali condizioni non sono soddisfatte. Nell'esempio, i selettori numerici fanno passare l'impulso per anno di nascita di decine 1 o 2 o 3 e per 4 solo se l'unità è 0, 1, 2, 3, 4; i selettori alternativi lo fanno proseguire se per uno dei tre titoli richiesti la risposta è Sì, ed infine se per nessuna delle professioni escluse la risposta è Sì. (Si noti, nel 2° e nel 4° selettore, il modo opposto in cui si realizzano le connessioni per ottenere rispett. le operazioni di « unione » (o « somma logica »: almeno uno...) e di « prodotto (logico) » (o « intersezione »: tutti...) conformemente a

non ($A$ e $B$) = (non $A$) o (non $B$), non ($A$ o $B$) = (non $A$) e (non $B$).

### 3. La via « istruttivamente storica »

Nell'indicare tale via — e in particolare l'opera di Manara e Lucchini — come « istruttivamente storica », ho inteso sottolineare i requisiti di studi storici riguardo alla matematica che siano rispondenti ad esigenze profondamente concettuali ed umane. L'affiorare di idee, prima indistinte, magari confuse, e poi impostesi spesso dopo lunghe lotte tra calcitranti; il progredire di un pensiero collettivo attraverso lampi più o meno isolati di genialità individuale spesso a lungo incompresa, le rifiniture e le rielaborazioni pe risistemare il tutto in una sintesi organica e chiarificatrice: tutto questo costituisce lo « slancio vitale » che la storia della matematica deve lumeggiare ed esaltare. Deviazioni nel senso della cronaca, dell'aneddotica, della pignoleria, sono magari tollerabili e gradevoli, purchè non futili o pedantesche bensì ispirate a senso critico e a senso dell'umorismo.

Una raccolta di brani storici della matematica (*Klassische Stücke der Mathematik*) donatemi da uno zio residente a Berlino quando ero ragazzo, ha contribuito molto a farmi apprezzare la matematica. Il curatore della raccolta, lo svizzero Andreas Speiser, era un buongustaio della matematica intesa in senso lato (basti dire che vi figuravano il *Paradiso* del Tintoretto e le terzine di Dante cui esso si riferiva). (E, poichè i ricordi gradevoli ne trascinano con se anche altri crudeli, non posso non ricordare il collega Zalai cui avevo prestato quello ed altri libri poco prima che venisse deportato come israelita e la sua casa svuotata di ogni cosa). In confronto a quello di Manara e Lucchini, la raccolta di Speiser era più dedicata a specialisti, con lavori per lo più difficili oltre che classici, e senza commenti.

Quella di Manara e Lucchini ha piuttosto un taglio specificatamente « didattico » in senso elevato: vengono riportati spesso soltanto brani di lavori o libri, integrandoli con cenni riassuntivi del tutto e dell'opera e personalità dell'A. ed altre notizie, utili per tutti e più che mai per i giovani e profani e quanti (in realtà penso lo siano tutti) non hanno mai conosciuto, o hanno dimenticato, o ricordano vagamente, l'epoca la vita gli scritti (magari gli aneddoti) riguardanti i singoli Autori.

In questo paragrafo, il curatore (fortunatamente per lui e per i lettori) ha assai meno necessità o motivo per interloquire: l'essenziale si riduce a riportare brani illuminanti dei vari AA allo scopo di invogliare (vorrei quasi dire « obbligare ») il lettore a leggere il tutto.

> *« Si incontrano abbastanza frequentemente persone, anche colte e intelligenti, che professano una decisa avversione per la matematica e che ostentano la loro ignoranza di questa scienza. Tale atteggiamento suscita spesso, in coloro che si dedicano alla matematica, il desiderio di farne comprendere lo spirito, e questo obiettivo si presenta talora come più importante di quello di insegnare risultati specifici o teorie, in forma sistematica oppure episodica ».*

E il libro *dovrebbe* rispondere bene a tale finalità. Il condizionale del « dovrebbe » non esprime un dubbio sulla sufficiente adeguatezza del libro, bensì alla disponibilità a leggerlo da chi è contrario per partito preso. Per lui sarebbe impensabile e insensato provarci, così come lo sarebbe per me legger un libro di « astrologia » o di « scienza della cabala »!

Seguono vari chiarimenti sugli intendimenti ecc., una buona bibliografia, ed infine, come « appendice alla prefazione », un brano, di Federico Enriques, « *Che cosa sono le matematiche* » (dal suo volumetto « *Le matematiche nella storia e nella cultura* »). Sia detto per inciso: è una delle prime letture consigliabili a profani desiderosi di farsi un'idea della mentalità matematica, nonchè a persone interessate alla didattica.

INTRODUZIONE (pp. 19-21)

Cenni su notizie antiche di argomento matematico, in particolare al valore di $\pi$ ($4\ (8/9)^2 = 3{,}16049$ nel « Papiro Rhind », cca 1700 a.C. $3\ ^1/_7 = 3{,}1429$ in Archimede; 3 (ma in cenno incidentale) nella Bibbia). Leggenda (o realtà) dell'origine della geometria per la necessità di ristabilire i confini dei terreni egiziani soggetti alla inondazione del Nilo. Legami con la filosofia, specie in Platone.

PLATONE (pp. 21-29); 428 a.C. - 348 a.C.

Cenni biografici e filosofici in nesso alla matematica.

Viene riprodotto il celebre dialogo *Menone* (trad.di A. Fraiese, *Platone e la matematica nel mondo antico*; ed. Studium, Roma 1963).

EUCLIDE (pp. 29-40); visse intorno al 300 a.C.

Sugli « elementi » c'è un'introduzione storica e la riproduzione di *Termini, Postulati, Nozioni comuni*; facsimili di edizioni storiche; dimostrazioni dell'infinità dei numeri primi; commenti.

ARCHIMEDE (pp. 40-49); 287 a.C. (circa) - 212 aC.

Descrizione della sua multiforme capacità e attività. Nei cenni introduttivi viene rilevata tra l'altro la sua sensatezza nell'esprimere i risultati dei suoi calcoli come « ordine di grandezza », dimostrando « uno spirito scientifico ben superiore a quello di certi moderni » che danno cifre con esattezza illusoria (cfr. l'oss. in *Spotorno-Villani* sulla media del vincitore della Milano-Sanremo!).

Di tale sensatezza dà prova A. nella lettera a Gelone, l'*Arenario* ripr. a pp. 42-45); seguono (inframezzate a commenti) lo scritto (a Dositeo) sulla quadratura della parabola (pp. 46-48) e un brano (per Eratostene) in cui esplicitamente vanta l'importanza creativa dei metodi che ora chiamiamo *euristici* (cioé intuitivi, visualizzabili), pur riconoscendo l'esigenza di un controllo sia pur pedantesco per raggiungere la necessaria certezza (pp. 48-49). Notevole inoltre il riconoscimento (in quest'ordine di idee) che « un merito non piccolo dovrebbe attribuirsi a Democrito che per primo enunciò queste proprietà delle figure senza dimostrarle ». E' l'intuizione che apre la via, anche se occorre poi il bulldozer del paziente pesante e magari pedante lavoro per consolidare rendere sicura e definitiva la conquista.

LEONARDO PISANO detto anche FIBONACCI (pagine 56-58); 1170? - 1230.

Dopo un'introduzione al periodo in cui vengono forgiati « *Nuovi strumenti per la Matematica* » (pp. 53-56) si parla dell'introduzione, dovuta al Fibonacci, dell'uso in Italia e in Occidente della numerazione araba di cui ebbe modo di constatare la comodità e razionalità nei suoi viaggi in Oriente. Sono riprodotti alcuni brani del « Liber Abaci » (1202; nuova versione 1228), cominciando dalle « nove cifre utilizzate dagli indiani » con quest'altro segno « 0 » che in arabo si chiama « zero ».

Senza tale innovazione sarabbe inimmaginabile ogni sviluppo di calcoli men che banali, e quindi ogni progresso nelle scienze quantitative nonchè in qualsiasi ramo di amministrazione pubblica o privata, contabile o statistica, in termini monetari o di magazzino.

Eppure, non sembra si sia ancora disposti a utilizzare in modo completo e ragionevole i possibili frutti di tale progresso. (Mi riferisco al cenno, involontariamente umoristico, alle idolatrate « classi contigue » nel n. 2, a proposito del « non insegnare cose troppo difficili » specie se la difficoltà è artificiosa superflua e confusionaria).

I CARTELLI DI MATEMATICA DISFIDA (pp. 59-80). In effetto si tratta di tre voci distinte, dedicate a GEROLAMO CARDANO (pp. 59-64; vissuto dal 1501 al 1576), a NICCOLO' TARTAGLIA (pp. 65-77, vissuto dal 1499? al 1557), mentre la terza (pp. 77-80) ha il titolo generico sopra indicato (ma che può valere per caratterizzare tutto il periodo e i suoi esponenti). Periodo travagliato, con protagonisti irrequieti e disgraziati, per i quali la matematica è motivo di rissa e sospetto, e occorre una specie strana di genialità per intuire e trovare, a volte, il modo di impostare e perfino risolvere problemi algebrici espressi con frasi contorte astruse e sibilline, mentre solo le notazioni algebriche non ancora inventate vi sarebbero poi riuscite in modo idoneo. I metodi di soluzione erano segreti, oggetto di sfide, confidenze riservate, delazioni; si direbbe che è roba tragicomica se non fosse stata tragica sul serio (basti leggere la storia di Tartaglia, narrata da lui medesimo (pp. 66-68)!).

Ma poi, ecco l'apparizione più straordinaria: quella dell'immaginario, salutato da Leibniz come « *analysis miraculum, idealis mundi monstrum, paene inter ens et non ens amphibium!* Ma come fu?

RAFAEL BOMBELLI (pp. 81-90) n.?, m.tra 1572 e 76, pur con quella difficoltà di notazioni (o, meglio, « non-notazioni ») già deprecata, riesce a vedere il profitto che si può trarre dalle radici di un numero negativo, considerate formalisticamente (senza interpretazioni di sorta) ma chiamando « più di meno » e « meno di meno » (sostanzialmente) le radici $+ i$ e $- i$ di $- 1$, e operando come noi facciamo (nonostante la mancanza di idonee notazioni e rappresentazioni, in particolare geometriche: piano di Argand-Gauss). Per avere una idea della terminologia vale la pena di riportare (p. 89) le denominazioni delle successive potenze di un numero: 1) Tanto; 2) Potenza; 3) Cubo; 4) Potenza di potenza; 5) Primo relato; 6) Potenza cuba 7) Secondo relato; 8) Potenza di potenza di potenza; 9) Cubo di cubo; 10) Potenza del primo relato; 11) Terzo relato; 12) Cubo di potenza di potenza.

## 4. Tempi moderni

I matematici che si incontrano nel seguito parlano già (più o meno) il nostro stesso linguaggio, con la stessa nostra mentalità (beninteso, nonostante variabilissime differenze, tra di loro e con noi, quanto a campi di ricerca, tendenze, temperamento, e via dicendo).

Comunque, si cercherà in seguito di limitarsi a citazioni tratte da scritti dei singoli AA (solo occasionalmente premettendo qualche passo delle presentazioni redazionali, distinguendole col tutto corsivo).

GALILEO GALILEI (pp. 96-108) 1564-1642 è il vero titanico antagonista dell'immortale Simplicio (immortale nel senso che — purtroppo! — vive tuttora reincarnato in tanti saccenti chiacchieroidi d'ogni risma). Senza parlare della sua opera come scienziato (e in particolare come pensatore matematico), val la pena di mostrarlo come campione della santa lotta contro i sofisti e contro i sofismi.

Simplicio sofistizzava sul termine « proporzione *composta* » con cui Galileo intendeva indicare una certa relazione, e Galileo ribattè (p. 108):

*« ...è una semplice imposizione di nome. Quando alla S.V. non piacesse il vocabolo di* composta, *chiamiamola incomposta, o impastata, o confusa, o in qualunque altro modo... solo accordiamoci in questo che quando nominerò la proporzione incomposta (o impastata, confusa...) vorrò intendere ecc. ecc. Intesa e stabilita la definizione... (la quale non consiste in altro fuori che nell'accordarsi che sorta di roba noi intendiamo sotto quel nome)... ».*

RENÉ DESCARTES (pp. 108-115) 1596-1650. Il suo metodo, la fusione di geometria ed algebra. è ben noto a tutti, e tutti apprezzeranno la conseguente possibilità di mettere l'intuizione geometrica al servizio della visualizzazione di questioni analitiche e gli strumenti analitici al servizio degli studi geometrici. Lo stesso Descartes (o, se si preferisce, Cartesio) disse: « Spero che coloro che saranno capaci di servirsi del calcolo geometrico che io propongo non troveranno ostacoli capaci di arrestarli...; spero che i nostri nipoti mi saranno grati, non soltanto per le cose che ho qui presentato o spiegato, ma anche per quelle che ho volontariamente omesso, per lasciar loro il piacere di scoprirle » (pp. 114-115).

PIERRE DE FERMAT (pp. 115-119) 1601-1665. Vale la pena di riportare una sua affermazione, di una ragionevolezza che mi pare ovvia ma che molti contestano (tenere tutto dentro di sé finchè non si è raggiunta la certezza della risposta): « Vi è per la scienza un certo interesse a non nascondere alla posterità le opere ancora immature dello spirito; infatti l'opera che è agli inizi semplice e rudimentale cresce e si rafforza a causa delle scoperte sempre nuove ».

BLAISE PASCAL (pp. 119-130) 1623-1662. « Fino dalla sua infanzia si risolveva ad accettare per vero soltanto ciò che tale gli appariva in modo evidente, così che, quando gli si davano delle ragioni che non erano buone, ne cercava lui da solo delle buone » (p. 119). Ci sono troppe cose da dire di Pascal; basti accennarne ancora una: la regola per ripartire le poste fra giocatori in base alle probabilità al momento dell'interruzione del gioco che venisse chiesta da qualcuno (« ciascuno dei giocatori trovi perfettamente uguale prendere quello che gli si assegna oppure continuare l'avventura del gioco ») (p. 130).

ISAAC NEWTON (pp. 131-144) 1642-1727. Ecco la sua chiara risposta alle difficoltà o incomprensioni sul significato della derivata (sopravvissute poi a lungo!):

> ... *« Si obietta che non esiste l'ultimo rapporto di quantità evanescenti, in quanto esso, prima che le quantità siano svanite non è l'ultimo, e allorché siano svanite non c'è affatto. Ma con lo stesso ragionamento si può giustamente sostenere che non esiste la velocità ultima di un corpo che giunga in un certo luogo, dove il moto finisce »*...
>
> ... *« Questa obiezione, però, si basa su una falsa ipotesi. Le ultime ragioni con cui quelle quantità si annullano non sono in realtà le ragioni delle ultime quantità, ma i limiti ai quali le ragioni delle quantità decrescenti si avvicinano sempre illimitatamente »*...

GOTTWALD WILHELM von LEIBNIZ (pp. 144-152) 1646-1716. Di questo personaggio multiforme (tra l'altro, prototipo del Pangloss nel *Candide* di Voltaire) conviene richiamare questi pensieri filosofici reinterpretati da Hadamard:

> ... *« Insisto che le parole sono totalmente assenti dalla mia mente quando penso realmente... Credo di dover dire che la penso così non solo delle parole ma anche dei segni algebrici... Uso rappresentazioni concrete ma di una natura completamente diversa. Un esempio di questo genere è già noto nella storia della scienza. Fu dato da Euler per spiegare a una principessa svedese le proprietà del sillogismo. Egli rappresenta le idee generali mediante cerchi... Personalmente, dovendo pensare a un sillogismo non penserei in termini di parole (le parole difficilmene ti permettono di vedere se il sillogismo è giusto o sbagliato) ma con una rappresentazione analoga a quella di Euler, solo che userei non cerchi ma figure di forma indefinita perché non ho necessità di una forma definita per pensare a figure interne o esterne l'una all'altra »*...

E approfitto per dirmi d'accordo, ed aggiungere che non solo anzichè di cerchi preferisco parlare di « patate » ma che rifiuto di considerarle come insiemi di punti appesantendole con una struttura che è e deve restare indefinita come il non-insieme di « tutte le cose che possono passarmi per la testa ».

GEROLAMO SACCHERI (pp. 158-166) 1667-1733. Merita di essere citata, come massima prova di acutezza e onestà intellettuale, la frase finale dell'opera in cui intendeva presentare un « *Euclides ab omni naevo vindicatus* ». Eccola: « Tuttavia non mi pare che questa dimostrazione sgorghi dall'intimo della ipotesi ammessa, come occorrerebbe per una perfetta confutazione della ipotesi stessa » (p. 166).

LEONHARD EULER (pp. 166-172) 1707-1783. Ne viene riportato (in sintesi) l'ormai celebre scritto sui « 7 ponti di Königsberg »; superfluo riportarne i brani, probabilmente superfluo dire quanto vasta e multiforme sia stata la sua opera.

PIERRE SIMON (Marquis de) LAPLACE (pp. 172-187) 1749-1827. Ne vengono riportate alcune pagine dell'*Essai philosophique sur les probabilités*, di cui riproduciamo qui tre brevi brani atti a illustrare il senso esteso in cui concepisce il ruolo di tale teoria nella scienza e nel pensiero.

> ... « *Si potrebbe addirittura dire, a rigore, che quasi tutte le nostre conoscenze sono soltanto probabili; e anche nelle pochissime cose che noi possiamo conoscere con certezza, cioè nelle scienze matematiche, i prinicipali mezzi per raggiungere la verità, cioè l'induzione e l'analogia, si fondano sulla probabilità; quindi l'intero sistema delle conoscenze umane si fonda sulla teoria che esponiamo in questo saggio* »...

> ... « *Desidero che le riflessioni che sono sparse in questo saggio possano conquistare l'attenzione dei filosofi e dirigerla verso un oggetto che è degno di interessarli* »...

> ... « *L'induzione, l'analogia, le ipotesi continuamente fondati sui fatti e rettificate da nuove osservazioni, un "fiuto" felice dato dalla natura e rafforzato da numerose analisi comparative e dalle indicazioni della esperienza; questi sono i mezzi principali per arrivare alla verità* »...

JEAN BAPTISTE FOURIER (pp. 187-193) 1768-1830. Con lo studio del calore, dei fenomeni irreversibili, Fourier ha aperto alla Fisica e alla Matematica un nuovo campo ricco di nuove problematiche. Alcune citazioni mostrano la sua consapevolezza dell'importanza di tale apporto. « Il calore penetra, come la gravità, ogni sostanza dell'universo; i suoi raggi occupano ogni parte dello spazio. Quale che sia la estensione e la potenza delle teorie della meccanica, esse non possono essere applicate agli effetti del calore: questi costituiscono una classe speciale di fenomeni. Lo scopo della nostra opera è quello di esporre le leggi matematiche alle quali ubbidisce questo elemento. Io ho dedotto queste leggi da un lungo studio e dal confronto di tutti i fatti conosciuti fino ad oggi: li ho osservati tutti di nuovo, nel corso di diversi anni, con gli strumenti più precisi che siano stati usati. Questa teoria formerà, d'ora innanzi, una delle parti più importanti della fisica generale ». (pp. 188-189).

... « *Abbiamo già accennato nell'introduzione a questo capitolo all'aspetto di novità che lo studio del calore a rispetto ai problemi della meccanica razionale, dovuto essenzialmente alla irreversibilità del fenomeno della trasmissione del calore. Si usa dire infatti che le leggi della meccanica razionale sono "reversibili"; quando per esempio si studia il movimento dei pianeti del sistema solare, si potrebbe cambiare il segno alla variabile tempo senza cambiare la forma matematica delle leggi stesse: si otterebbe semplicemente la descrizione del passato del sistema solare.*

*Invece quando si prendono in considerazione i fenomeni nei quali interviene si ha una sostanziale dissimmetria del tempo, perché tali fenomeni sono " irreversibili "* ».

... « *Come si vede, Fourier ha una conoscenza molto precisa della importanza dello studio dei fenomeni del calore per la fisica; la cosa più interessante è che i risultati di Fourier sono validi anche se il calore non è un "elemento" come egli dice. Si potrebbe dire infatti che il significato dello studio matematico attinge il livello puramente fenomenologico, e rimane valido quale che sia la " natura " ovvero la " sostanza " degli enti studiati.*

*I teoremi sull'armonia a cui fa cenno Fourier sono probabilmente le leggi della vibrazione delle corde tese, che vengono attribuite a Pitagora* »...

... « *Infatti i vari corpi non posseggono affatto nello stesso grado la facoltà di contenere, di ricevere o di trasmettere il calore attraverso la loro superficie, oppure di condurlo nell'interno della loro massa.*

*La nostra teoria insegna a distinguere chiaramente ed a misurare queste tre quantità specifiche* »...

... « *E non vi è linguaggio che sia più universale e più semplice, più libero da errori e da oscurità, cioè non vi è linguaggio che sia più degno di esprimere le relazioni invariabili tra enti naturali.*

*Considerata da questo punto di vista, la analisi matematica ha la stessa estensione della natura: definisce tutti i rapporti sensibili, misura i tempi, gli spazi, le forze, le temperature.*

*Questa scienza si forma lentamente, ma conserva ogni suo principio, dal momento in cui l'ha conquistato; cresce e si afferma continuamente, tra la folla di errori e di cambiamenti dello spirito umano.*

*Il suo attributo principale è la chiarezza: essa non ha simboli per le idee confuse.*
*Essa accosta i fenomeni più diversi e ne scopre le analogie segrete che li unificano »...*

NICOLAJ LOBACEVSKIJ (pp.194-197) 1972-1856. Egli riprende, invertendolo, il discorso di Saccheri: Considerando, in un piano, una retta e tutte le rette passanti per un punto dato, si ammette che tra queste ve ne siano che tagliano la retta e che non la tagliano; in tal condizione L. definisce « parallele » alla retta data per quel punto, quelle che separano le rette secanti e non secanti. E L. continua imperturbabile a trarre tutte le conseguenze, perfettamente rigorose, dalle ipotesi audacissime che egli ha enunciato. (Mentre il grande Gauss, che aveva scoperto le stesse cose, le aveva tenute per se « per timore delle strida dei Beoti »!).

Non posso trattenermi dall'aggiungere che questo atteggiamento diminuisce di molto la mia stima per il proclamato « princeps mathematicorum », che mi fa rammentare la rampogna di Dante per « *chi fece per viltade il gran rifiuto* » (2), e accendere al massimo quella per il giovane Lobacevkij, che invece mi richiama alla mente alcuni versi di D'Annunzio che mi piacevano quando ero adolescente: « *Io mi affretto alle pugne, cavaliero — ignoto, in arme brunita cavalco — per la campagna scabra, ed un pensiero — superbo m'arde nell'occhio di falco* » (collegandoli anche a « *La gran bontà dei cavalieri antiqui* » secondo Ariosto e quella del Don Quixote che si slancia contro i mulini a vento).

Incidentalmente, avendo menzionato Gauss, è opportuno qui spiegare (come fanno gli AA. a pp. 157-158) che l'inclusione del volume di determinati AA. con esclusione di altri dipende non dal diverso apprezzamento ma da esigenze di « una rassegna corrispondente agli scopi propostisi », variata viva stimolante. Gli AA. stessi, esemplificando alcune omissioni da un altro punto di vista inescusabili, menzionano tre stranieri (per l'appunto Gauss in primo luogo, e poi Weier-

(2) Per inciso: la rampogna mi sembra ingiusta nei riguardi di papa Celestino V cui Dante si riferiva, e che ritengo invece l'unico, insieme a Giovanni XXIII, meritevole di ammirazione e di amore.

strass e Riemann) e due italiani (Castelnuovo e Severi), dandone per ciascuno una breve nota biografica.

GEORGE BOOLE (pp. 198-206) 1815-1864. L'« algebra di Boole » è ormai nota a tutti in quanto logica del calcolo automatico e dell'insiemistica; la sua profonda ambizione e funzione è però più alta e generale (come Boole stesso enuncia all'inizio del suo trattato: « è quella di investigare le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente mediante le quali si realizza il pensiero » (p. 199).

GEORG CANTOR (pp. 206-209) 1845-1918. A lui si deve l'estensione (se così si può dire) della nozione di numero agli insiemi infiniti (p. es. gli interi, i numeri primi, i razionali hanno la stessa numerosità: sono un'infinità numerabile, potendoli metterli in corrispondenza biunivoca con la successione degli interi), mentre i reali (i punti di una retta, di un piano, dello spazio,...) hanno la numerosità (o « potenza ») del *continuo*. (E maggiore è quella dell'insieme delle funzioni, benchè siano ancora solamente un'infinità con la « potenza del continuo » se ci limitiamo alle funzioni continue). Più complessa ancora la considerazione dei numeri « transfiniti ».

GOTTLOB FREGE (pp. 209-214) 1848-1925. Campione del più inesorabile rigore, partendo dall'osservazione che « nella matematica dei tempi recenti è riconoscibile una netta tendenza verso il rigore delle dimostrazioni e l'esatta determinazione dei concetti » ... « prosegue esponendo le ragioni filosofiche della sua ricerca, ed analizzando il significato delle verità analitiche o sintetiche, a priori ed a posteriori ».

FELIX KLEIN (pp. 215-223) 1849-1925. Probabilmente tutti sanno che, oltre ad essere un grande matematico, si occupò in modo acuto ed attivissimo dei problemi della didattica della matematica. Anche a distanza di oltre un secolo dal famoso « Programma di Erlangen » (1872) e dai tre volumi « Elementarmathematik aus höherem Standpunkte aus » (apparsi intorno al 1900), ritengo che sia da Klein che le esigenze di rinnovamento didattico devono prendere lo spunto (pur senza escludere adeguamenti a certi progressi — quelli veri, non quelli fasulli! — e aggiornamenti ad esigenze mutevoli).

Ecco un brano in cui egli spiega e sottolinea l'importanza fondamentale, anche nella didattica, della visione *gruppale*:

> ... « *Il concetto più essenziale fra quelli necessari per quanto esporremo in seguito è quello di* gruppo *di trasformazioni dello spazio.*
> *Componendo assieme quante si vogliano trasformazioni dello spazio, si ha sempre di nuovo una trasformazione. Ora, se una data serie di trasformazioni gode della proprietà che ogni trasformazione risultante da composizioni di queste appartenga alla serie medesima, chiameremo quest'ultima un* gruppo di trasformazioni »...

HENRI POINCARÉ (pp. 224-235) 1854-1912. Oltre che aver « lasciato la sua impronta in moltissimi campi della matematica pura ed applicata », egli ha molto riflettuto e scritto « sui problemi logici e psicologici della matematica; sul problema del procedimento mediante il quale lo spirito del matematico arriva alla scoperta ed alla dimostrazione ».

Il brano che segue illustra la differenza psicologica e attitudinale tra matematici che preferiscono vedere e risolvere i problemi « con analisi » o « con la geometria » (da intentendersi in senso intuitivo):

> ... « *I primi sono incapaci di "vedere nello spazio", gli altri si stancherebbero immediatamente dei lunghi calcoli e resterebbero imbrogliati ed arenati.*
> *Entrambi i tipi di intelligenza sono ugualmente necessari per il progresso della scienza; i logici, così come gli intuitivi, hanno fatto delle cose grandi, che nessun altro avrebbe potuto fare. Chi oserebbe dire che sarebbe meglio che Weierstrass non avrebbe scritto oppure che Riemann non fosse esistito? L'analisi e la sintesi hanno dunque entrambe il loro posto, ed il loro compito legittimo. Ma sarebbe interessante studiare da vicino nella storia della scienza la parte dell'una o dell'altra* »...

Il brano successivo applica specificatamente tali osservazioni al problema dell'insegnamento, opportunamente mettendo in guardia contro i danni dell'eccessivo rigorismo, astrattismo, logicismo, pèdantismo:

> ... « *Non è questo che voglio dire. Diventando rigorosa, la scienza matematica prende anche un carattere di artificialità che salta agli occhi di chiunque; essa dimentica*

*le sue origini storiche; si vede come si risolvono i problemi, ma non si vede come e perché i problemi sono nati.*
*Questo ci fa vedere che la logica non basta; che la scienza della dimostrazione non è tutta la scienza, che l'intuizione deve conservare il suo compito complementare; stavo dicendo come contrappeso o come contravveleno alla logica.*
*Su* L'enseignement mathématique [...] *ho già avuto occasione di insistere sul posto che la intuizione deve conservare nell'insegnamento delle scienze matematiche.*
*Senza di lei, le giovani intelligenze non potrebbero essere iniziate alla comprensione della matematica, non potrebbero imparare ad amarla e vedrebbero in essa una pura logomachia; e soprattutto senza di lei non sarebbero mai capaci di fare delle applicazioni della matematica »...*

DAVID HILBERT (pp.236-245) 1862-1943. « Ha un posto particolare della storia della matematica per l'importanza dei risultati che si debbono a lui e per la vastità degli interessi ed il numero dei campi in cui ha svolto le sue ricerche ». Di lui, riportiamo questa riflessione assai caratteristica del suo modo di vedere le cose:

*« Questa convinzione, della possibilità di risolvere ogni problema matematico, è per noi un incoraggiamento prezioso durante il lavoro. Noi sentiamo sempre risuonare in noi stessi questa voce: « Ecco il problema: cercane la soluzione! Tu puoi trovarla con il solo ragionamento! Mai un matematico sarà ridotto a dire:* Ignorabimus ».

JACQUES HADAMARD (pp. 245-250) 1865-1963. È stato uno dei più grandi matematici, ma inoltre, nel saggio « *La psicologia dell'invenzione* in matematica » ha esposto interessanti analisi dei procedimenti interiori con i quali la mente giunge alla scoperta di una verità matematica. Manara e Lucchini ne hanno riprodotto alcune parti, di cui ecco qualche brano:

... *« Quando ho ascoltato o letto la questione, ogni parola scompare nella mia testa non appena incomincio a pensarci veramente; le parole riappaiono soltanto quando ho compiuto oppure abbandonato la ricerca, così come avveniva a Galton; e sono anche pienamente d'accordo con Schopenhauer quando egli scrive che "I pensieri muoiono nel momento in cui vengono incarnati in parole".*
*Ritengo essenziale sottolineare che il mio atteggiamento è uguale nei riguardi delle parole e dei simboli algebrici.*
*Io li impiego quando devo fare dei calcoli alla svelta; ma quando il problema comincia a diventare difficile, li abbandono, come se fossero un bagaglio troppo pesante da portare e uso delle rappresentazioni concrete, ma di natura del tutto diversa.*

> *Un esempio di questo tipo è già conosciuto nella storia della scienza. È stato fornito da Eulero per spiegare le proprietà del sillogismo ad una principessa di Svezia »...*

(Si tratta delle « patate », come già accennato a proposito di Leibniz; ed anche la ripulsa del farne cerchi è la medesima come per Leibniz!).

E quanto sarebbe mai utile, specie in sede didattica, ascoltare la voce di Hadamard contro l'innaturale e insulsa mania di cominciare dall'astratto, dal generale, magari da assiomi. Ascoltiamolo! ascoltiamolo!

> ... *« Il cammino dello spirito umano è essenzialmente induttivo; cioè procede dal concreto all'astratto. Perciò la comprensione del generale è bene sempre conseguire come un grado più alto di qualcosa di più facile che sia già conosciuto, cioè come "generalizzazione". D'altronde l'esempio ha una virtù chiarificatrice che ne fa un valido istrumento della ricerca scientifica e, in pari tempo, un prezioso mezzo di verificazione e di correzione delle dottrine »...*

FEDERIGO ENRIQUES (pp. 251-260) 1871-1946. Inutile dire qui (tranne, forse, per i giovanissimi) chi era Enriques: oltre che scienziato e pensatore acutissimo, per lungo tempo Presidente della Mathesis e Direttore di questo Periodico, oltre che autore di testi scolastici forse troppo belli per chi decideva le « adozioni ». Di lui è riprodotto un articolo su « L'errore nelle matematiche », che è spesso un passo felice per avvicinarsi alla verità superandolo, anzichè qualcosa di orribile come appare a Platone: « mi turba il non poter dire che sia questa passione per cui ci capita di opinare il falso » (Teeteto). Non così per Enriques, per il quale « l'astratto è insieme un atto intuitivo e logico ed ha perciò due significati o momenti strettamente connessi, che non debbono confondersi in un processo mentale semi-oscuro ».

E così (ribadendo concetti conformi a quelli di Hadamard) conclude:

> ... *« Così dunque l'analisi del problema dell'errore viene a convalidare le norme che abbiano tratto come ammaestramento dall'esperienza del lavoro dei matematici nella storia. Se e finché la matematica progredisca nel suo cammino millenario, senza isterilirsi nell'esercizio di pedanti senza fantasia, queste norme conserveranno il loro valore, e di fronte (in opposizione solidale) alle esigenze di una logica sempre più raffinata, si affermeranno ancora i diritti dell'intuizione, che è l'attività creativa della scienza »...*

## 5. La via « istruttivamente rapsodica »

È certamente, in un certo senso, la via più affascinante; dico subito, però, ad evitare d'esser frainteso, che essa richiede, per lo meno come completamento, un lavorio di risistemazione a posteriori. Oppure, al contrario, se si volesse partire da un'impostazione tradizionalmente sistematica (« un mattone dopo l'altro, un mattone sopra l'altro » come dissi una volta con un pizzico di cattiveria), occorrerebbero, a mio avviso, almeno delle parentesi, degli intermezzi a sorpresa, del tipo rapsodico.

Nel secondo caso, per restare nella metafora, si comincerebbe dal preparare mattoni senza sapere se e a che cosa possano servire, e poi insegnare a metterli in certo modo, per costruire qualcosa che non si deve sapere se e a che cosa serva. Nel primo, si tratta di far intravvedere i lineamenti in grande del monumento da costruire, lo scopo a cui deve servire, i requisiti a tal fine necessari (e perchè?), e, se a ciò occorrono mattoni, cemento, ferro, calce, sabbia, ecc., studiare dove ciò si trova o come si fabbrica e con quali strumenti, e soprattutto quale disegno o struttura d'insieme occorre, con gusto architettonico, con animo artistico, con impegno da artigiano e da stakanovista. Tutto è possibile se l'insegnante ha entusiasmo e sa suscitare entusiasmo.

Sui due esempi cui fin dall'inizio ho fatto riferimento — il libro di Emma Castelnuovo e Mario Barra e l'articolo di David Hawkins — c'è ben poco da dire qui, dato che il secondo (in traduzione italiana) è pubblicato nel presente fascicolo, e c'è anche una sia pur succinta presentazione del primo.

Si può forse dire che la trattazione secondo una scelta di « problemi » (e dei metodi man mano che « servono ») prevale nella visione della Castelnuovo, mentre l'occasionalità di problemi provenienti da osservazioni varie nel corso di una escursione, quale descritta da Hawkins, ricade nell'altro tipo. Ma, in fondo, distinzioni così idealizzate non hanno riscontro nella realtà, e tutto dipende dall'equilibrio della visione globale cui ciascuno (necessariameunte, qui più che mai, « ciascuno a suo modo ») ispira il proprio atteggiamento, il proprio rapporto, il reciproco impegno di capire e farsi capire e far sapere se si ha chiarito, che deve caratterizzare il reciproco interscambio di idee suggerimenti riflessioni dubbi (e talvolta, certo, rifiuti) tra l'insegnante e gli allievi.

Il segreto, forse, sta in un'unica cosa, semplice ma forse spesso rifiutata o trovata ostica: « essere se stessi », non creare distanze o antagonismi, accettare e confessare la propria parte di torto e di responsabilità per gli insuccessi, riconoscere la parte di merito spettante agli allievi grazie agli stimoli da essi forniti col palesare dubbi, chiedere chiarimenti, suggerire argomenti, dimostrare letizia per ogni arricchimento di idee che sembri loro apprezzabile.