SULLE OPERAZIONI DELL'ANALISI VETTORIALE CHE NON DIPENDONO DALLE NOZIONI METRICHE.

In: « *Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei* », Roma, 1929, pp. 221-233.

BRUNO DE FINETTI

SULLE OPERAZIONI DELL'ANALISI VETTORIALE

CHE NON DIPENDONO DALLE NOZIONI METRICHE

Estratto dagli *Atti della Pont. Accademia delle Scienze Nuovi Lincei*
Anno LXXXII — Sessione VI del 19 Maggio 1929

ROMA
SCUOLA TIPOGRAFICA PIO X
Via degli Etruschi, 7-9

1929

Sulle operazioni dell'analisi vettoriale che non dipendono dalle nozioni metriche

Nota di BRUNO de FINETTI, presentata dal S. O. GIOVANNI GIORGI (1)

Sommario. — § 1. Distinzione fra nozioni *metriche* e nozioni *omografiche* nel calcolo vettoriale, e sua importanza. — § 2. Algoritmo generale dei sistemi lineari e operatori lineari. — §§ 3-4. L'integrazione e la derivazione come nozioni omografiche. — §§ 5-10. Trasformazione in integrali di campo di integrali estesi al contorno; operatori differenziali Z_n che ne danno la più generale espressione algoritmica. — §§ 11-14. Gli ordinari *div, grad, rot, Rot* come casi particolari degli operatori Z_n.

§. 1. — Per dare al calcolo vettoriale un ordinamento soddisfacente dal punto di vista critico, per renderlo facilmente atto a larghe estensioni, per raggiungere la massima semplicità e generalità nell'algoritmo, ritengo sia sommamente opportuna ed abbia importanza essenziale la distinzione sistematica dei concetti *metrici* e dei concetti *omografici*, chiamando così quelli che hanno carattere invariantivo rispetto ad ogni omografia (trasformazione affine), e cioè quelli che dipendono soltanto dalla proprietà dei vettori di costituire un sistema lineare (secondo BURALI-FORTI e MARCOLONGO). Ho potuto constatare e apprezzare in diverse ricerche i vantaggi di questo modo di procedere, che mi sembrano veramente notevoli, e cercherò qui di giustificare tale asserzione sviluppando secondo i concetti accennati un punto particolare del calcolo vettoriale: quello degli operatori differenziali che servono per le trasformazioni d'integrali.

Prenderemo come solo dato di partenza la definizione di sistema lineare (secondo B. F. e M.): una classe di enti U tali che la somma di due U, il prodotto di un U per un numero, siano sempre degli U (2), e non intenderemo posta alcuna limitazione al numero delle dimensioni (che potrà anche

(1) Nella seduta del 21 aprile 1929.

(2) BURALI-FORTI e MARCOLONGO. *Transformations linéaires* (A. V. G. Vol. I).

essere infinito). Dopo un breve riassunto dei mezzi di calcolo necessari, stabiliremo un teorema sulla trasformazione in integrali di campo di integrali estesi al contorno, che è il risultato più ampio che si possa ottenere sull'argomento, e vedremo come gli ordinari *div, grad, rot, Rot* siano adattamenti a casi particolari ed esigenze pratiche speciali di un'unica operazione assai generale, concettualmente semplice e spontanea.

§ 2. — Gli enti che ci occorre considerare nel campo o spazio U sono le *omografie* (operatori lineari) per gli U

$[x, y$ essendo U, p un numero: $\quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \ , \quad \alpha(px) = p(\alpha x)]$.

U e V essendo sistemi lineari, le omografie fra U e V costituiscono pure un sistema lineare, che indicheremo $\mathbf{H}(\mathrm{U},\mathrm{V})$. Potremo considerare quindi delle omografie tra U e $\mathbf{H}(\mathrm{U},\mathrm{V})$, che indicheremo $\mathbf{H}_2(\mathrm{U},\mathrm{V})$, e così di seguito, ponendo per induzione $\mathbf{H}_{n+1}(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \mathbf{H}(\mathrm{U},\mathbf{H}_n(\mathrm{U},\mathrm{V}))$. Le $\mathbf{H}_n(\mathrm{U},\mathrm{V})$, *iperomografie d'ordine n* tra U e V, sono operatori che applicati successivamente a n elementi di U, $x_1 x_2 \dots x_n$, producono un V che dipende linearmente da ciascuno degli x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Si noti che un' iperomografia d'ordine n è a fortiori iperomografia d'ordine r per $r < n$, avendosi

$$\mathbf{H}_n(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \mathbf{H}_r(\mathrm{U},\mathbf{H}_{n-r}(\mathrm{U},\mathrm{V})).$$

Se α è un' iperomografia d'ordine n, indicheremo $\mathrm{k}_n\alpha$ l' iperomografia dello stesso ordine tale che

$$\mathrm{k}_n \alpha\, x_1 x_2 \dots x_n = \alpha\, x_2 \dots x_n x_1 .$$

Avremo

$$\mathrm{k}_n^2 \alpha\, x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \alpha\, x_3 \dots x_n x_1 x_2 , \dots ,$$

$$\mathrm{k}_n^{n-1} \alpha\, x_1 \dots x_{n-1} x_n = \alpha\, x_n x_1 \dots x_{n-1} \ , \quad \mathrm{k}_n^n \alpha = \alpha \ , \quad \mathrm{k}_n^{n+c} = \mathrm{k}_n^c \ , \quad \mathrm{k}_n^{-1} = \mathrm{k}_n^{n-1} .$$

Una classe particolarmente notevole di iperomografie sono quelle che godono della proprietà alternativa ($\alpha\, x_1 x_2 \dots x_n$ è funzione lineare alternata di $x_1 x_2 \dots x_n$, ossia cambia segno scambiando tra loro due delle x). Diremo *iperassiale d'ordine r* un'iperomografia almeno d'ordine r che gode della proprietà alternativa rispetto ai primi r argomenti; è facile vedere che condizione caratteristica è che

$$\mathrm{k}_h \alpha = (-1)^{h+1} \alpha \qquad (h = 2, 3, \dots, r).$$

Se α è iperassiale d'ordine r si ha $\alpha x_1 \dots x_r = \Delta .\ \alpha x'_1 x'_2 \dots x'_r$ se le x dipendono linearmente dalle x' e Δ è il determinante della sostituzione. In particolare $\alpha x_1 \dots x_r = 0$ se le $x_1 \dots x_r$ non sono linearmente indipendenti; se è soltanto in tale ipotesi che $\alpha x_1 \dots x_r$ si annulla, l'iperassiale si dice *propria*, altrimenti *degenere*. Se π è un'iperassiale propria d'ordine r, e $\pi x_1 \dots x_r = \pi x'_1 \dots x'_r$, le x dipendono linearmente dalle x' e il determinante della sostituzione è 1; allora anche per qualunque altra iperassiale α d'ordine r è $\alpha x_1 \dots x_r = \alpha x'_1 \dots x'_r$, e si può porre $\alpha = \lambda\pi$ ove λ è un operatore lineare.

§ 3. — Pur non avendo considerato nè volendo considerare i concetti metrici (quali: distanza di due punti, modulo di un vettore, prodotto interno di due vettori, ortogonalità, angolo, ...) potremo introdurre l'integrazione. L'integrale d'un'omografia su una linea si può definire nel modo usuale. Dei casi nuovi, consideriamo dapprima, per fissare le idee, quello di due dimensioni, interpretando il sistema lineare U come il sistema dei vettori. Se αxy è funzione lineare alternata dei vettori x e y (α è iperassiale di 2° ordine), e dividiamo comunque il triangolo orientato (x, y) che ha come due lati consecutivi x e y in una somma di triangoli ugualmente orientati (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n), si ha ovviamente, per quanto precede, che

$$\alpha xy = \alpha x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \dots + \alpha x_n y_n .$$

Inversamente, perchè ciò si verifichi, α deve essere iperassiale di 2° ordine. Le iperassiali determinano dunque funzioni *additive* degli elementi d'area orientati, e ciò basta a far presumere che, sotto ipotesi molto larghe, saranno atte a dar luogo a un procedimento d'integrazione.

Sia $\alpha(z)$ un'iperassiale di 2° ordine fra U e V, funzione dell'elemento z di U, e σ una figura orientata continua a due dimensioni. Se sostituiamo a σ una figura poliedrica a faccette triangolari (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) e sommiamo i termini $\frac{1}{2}\alpha(z_i)\, x_i\, y_i$ [1], dove $\alpha(z_i)$ è l'iperassiale corrispondente a un punto della faccetta i-esima, e facciamo tendere la figura poliedrica a σ, in generale la somma considerata tenderà a un limite (che sarà un V) e che potremo in tal caso indicare, per definizione,

$$\int_\sigma \alpha \quad : \quad \textit{integrale di } \alpha \textit{ su } \sigma .$$

[1] La divisione per 2 si fa volendo che il valore αxy competa non al triangolo, ma al parallelogrammo, di lati x, y, e questo ha area doppia.

Lo stesso vale se $\alpha(z)$ è iperassiale d'ordine n e σ figura orientata a n dimensioni: se a un prismetto parallelepipedo orientato di lati (o spigoli) $x_1\, x_2 \dots x_n$ facciamo corrispondere $\alpha(z).\ x_1\, x_2 \dots x_n$, dove z è un punto del prismetto, per la proprietà additiva e la nozione di limite resta definito l'integrale di α esteso a σ:

$$\int_\sigma \alpha\ .$$

E' poi ovvio che, cambiando l'orientamento, l'integrale cambia di segno; che scomponendo σ in due parti σ' e σ'' ugualmente orientate è

$$\int_\sigma = \int_{\sigma'} + \int_{\sigma''}\ ;$$

che se σ' e σ'' hanno una parte comune con orientamento opposto i contributi di queste due parti si elidono, e, indicando σ la figura residua, si ha ancora

$$\int_{\sigma'} + \int_{\sigma''} = \int_\sigma\ .$$

In altre parole: la somma degli integrali estesa al contorno di più pezzi adiacenti di una figura (e aventi quindi parti del contorno comuni) è uguale all'integrale esteso al contorno della figura complessiva (eliminando quindi le divisioni interne).

Volendo dare forma precisa alle definizioni ora adombrate si incontrerebbero dei punti delicati e si presenterebbero molte possibili varianti di dettaglio; comunque, almeno nell'ipotesi più semplice delle funzioni continue, il poco che abbiamo detto dovrebbe essere certo sufficiente a definire l'integrale senza ambiguità. Nostro intendimento è qui piuttosto di illustrare un concetto che di precisarlo, ed è perciò che sembra preferibile sorvolare per ora sulle questioni critiche.

I noti integrali di superficie:

$$\int_\sigma \mathbf{n} \times v d\sigma \quad , \quad \int_\sigma \alpha\, \mathbf{n} d\sigma$$

si possono tradurre secondo la definizione ora data (e quindi *eliminando i concetti metrici*) se si pone

$$\mathbf{n} d\sigma = \frac{1}{2}\, dP \wedge \delta P \ (d\sigma \text{ triangolare} \quad ; \quad \text{lati } dP\ ,\ \delta P)\ ,$$

e

$$v\mathbf{xy} = \mathbf{v} \times \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \quad , \quad \beta\mathbf{xy} = \alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y});$$

v e β risultano iperassiali di 2° ordine rispettivamente fra vettori e numeri e fra vettori e vettori

$$(v\mathbf{yx} = \mathbf{v} \times \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} = -\mathbf{v} \times \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -v\mathbf{xy} \quad ; \quad \beta\mathbf{yx} = -\beta\mathbf{xy}).$$

Sommando i termini del tipo

$$\frac{1}{2}\, v.\, dP.\, \delta P \quad , \quad \frac{1}{2}\, \beta.\, dP.\, \delta P \; ,$$

si hanno al limite gli integrali rispettivamente di v e di β, cioè

$$\int_\sigma v = \int_\sigma \mathbf{v} \times \mathbf{n}\, d\sigma \quad , \quad \int_\sigma \beta = \int_\sigma \alpha\, \mathbf{n}\, d\sigma \; .$$

§ 4. — Se fx è un ente lineare funzione del punto x di U definiamo (ove esista) la derivata di f nel punto x, $\mathrm{d}fx$, come quell'omografia tale che

$$(\mathrm{d}fx)\, y = \lim_{m=0} \frac{1}{m} \Big[f(x+my) - fx \Big] \, ,$$

o, con notazioni meno rigorose,

$$(\mathrm{d}\, fx) \,.\, dx = f(x+dx) - fx \, .$$

Si ha

$$\mathrm{d}\,(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g \quad , \quad \mathrm{d}\,(mf) = m \,.\, \mathrm{d}f \qquad (\mathrm{d} \text{ è lineare}).$$

Ponendo

$$\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}\mathrm{d}f \quad , \quad \mathrm{d}^{n+1} f = \mathrm{d}\mathrm{d}^n f \, ,$$

otteniamo le derivate successive. Per l'invertibilità delle derivazioni sarà ordinariamente

$$(\mathrm{d}^2 fx)\, x_1\, x_2 = (\mathrm{d}^2 fx)\, x_2\, x_1 \; ;$$

in generale $(\mathrm{d}^n fx)\, x_1\, x_2 \dots x_n$ sarà indipendente dall'ordine delle $x_1 \dots x_n$.

Se fx è un V, $\mathrm{d}fx$ è una **H**(U,V), $\mathrm{d}^n fx$ una $\mathbf{H}_n$(U,V).

§ 5. — E' chiaro che l'integrale di αf su un arco di linea s da x_1 a x_2 è uguale alla differenza tra i valori di f negli estremi:

$$\int_s \alpha f = f x_2 - f x_1 \; .$$

Una funzione il cui integrale su un arco di linea dipende soltanto dagli estremi, e non dal cammino percorso, si dirà *esattamente integrabile* (termine usuale corrispondente: *differenziale esatto*); condizione caratteristica è ovviamente che sia nullo l'integrale esteso a una qualunque linea chiusa. Se una funzione è esattamente integrabile, esiste un'altra funzione di cui essa è la derivata (determinata a meno di una costante additiva arbitraria). Infatti l'integrale di f da 0 a x è una funzione di x la cui derivata è la stessa f.

§ 6. — E' interessante stabilire l'equazione differenziale cui f (supposta derivabile, ecc.) deve soddisfare per essere esattamente integrabile (analoga alla rot $\mathbf{v} = 0$ perchè $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$, $\int_{\bigcirc} \mathbf{v} \times dP = 0$).

Se f è esattamente integrabile, esisterà g tale che $f = \alpha g$; allora

$$\alpha f = \alpha^2 g \; ,$$

e avendosi

$$(\alpha^2 g x)\, yz = (\alpha^2 g x)\, zy$$

dovrà essere

$$(\alpha f x)\, yz - (\alpha f x)\, zy = 0 \; .$$

Poniamo

$$(Z f x)\, yz = (\alpha f x)\, yz - (\alpha f x)\, zy$$

ossia

$$(Z f)\, x = (1 - \mathrm{k}_2)\, (\alpha f x) \; .$$

Condizione necessaria per l'esatta integrabilità di f è allora $Zf = 0$.

Tale condizione è anche sufficiente: lo prova una formula per la trasformazione di integrali che possiamo riguardare come una prima generalizzazione del teorema di Stokes.

§ 7. — La formula accennata è la seguente:

$$\int_\sigma Z f = \int_s f \; ,$$

dove s è un circuito (orientato, cioè percorso in un senso determinato), e σ un diaframma (orientato in modo corrispondente) di cui s è il contorno.

Dalla definizione scende intanto chiaramente che

$$(\mathrm{Z}fx)\, yz = -(\mathrm{Z}fx)\, zy\ ,$$

ossia $(\mathrm{Z}fx)$ è iperassiale di 2^0 ordine funzione del punto x; è quindi lecito parlare di integrale di $\mathrm{Z}f$ su di un campo σ a due dimensioni.

Per dimostrare l'uguaglianza, almeno pei casi in cui ci si può affidare senza pericolo d'errore alle nozioni generiche sulla proprietà additiva e sul passaggio al limite, basterà dunque provare che essa è vera per un parallelogramma « *infinitesimo* » di lati $d\mathrm{P}$, $\delta\mathrm{P}$. Se $f(\mathrm{P})$ è un'omografia funzione del punto P, nell'intorno considerato si potrà porre

$$f(\mathrm{P}+d\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}) + (\mathrm{q}f\mathrm{P})\,.\,d\mathrm{P}\,;$$

la circuitazione di f sul contorno del parallelogrammo (percorso nell'ordine: $d\mathrm{P}, \delta\mathrm{P}, -d\mathrm{P}, -\delta\mathrm{P}$) sarà allora

$$\begin{aligned} f(\mathrm{P})\,.\,d\mathrm{P} + f(\mathrm{P}+d\mathrm{P})\,.\,\delta\mathrm{P} - f(\mathrm{P}+\delta\mathrm{P})\,.\,d\mathrm{P} - f(\mathrm{P})\,.\,\delta\mathrm{P} = \\ = [f(\mathrm{P}+d\mathrm{P}) - f(\mathrm{P})]\,.\,\delta\mathrm{P} - [f(\mathrm{P}+\delta\mathrm{P}) - f(\mathrm{P})]\,.\,d\mathrm{P} = \\ = (\mathrm{q}f\mathrm{P})\,.\,d\mathrm{P}\,.\,\delta\mathrm{P} - (\mathrm{q}f\mathrm{P})\,.\,\delta\mathrm{P}\,.\,d\mathrm{P} = (\mathrm{Z}f\mathrm{P})\,.\,d\mathrm{P}\,.\,\delta\mathrm{P} \qquad c.\ d.\ d. \end{aligned}$$

Se $\mathrm{Z}f = 0$, la circuitazione di f è nulla, e f è esattamente integrabile.

§ 8. — Nel caso generale in cui fx è un'iperassiale d'ordine n, σ è una figura chiusa a n dimensioni, τ una figura a $n+1$ dimensioni che ha per contorno σ, vale analogamente la formula:

$$\int_\sigma f = \int_\tau \mathrm{Z}_n f$$

dove Z_n è un'operatore differenziale lineare di primo ordine di cui il Z precedente è caso particolore per $n=1$: $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}$.

I Z_n successivi sono così definiti:

$$(\mathrm{Z}_2\, fx)\, x_0\, x_1\, x_2 = -(\mathrm{q}fx)\, x_0\, x_1\, x_2 - (\mathrm{q}fx)\, x_1\, x_2\, x_0 - (\mathrm{q}fx)\, x_2\, x_0\, x_1\ ,$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{Z}_3\, fx)\, x_0\, x_1\, x_2\, x_3 = (\mathrm{q}fx)\, x_0\, x_1\, x_2\, x_3 - (\mathrm{D}fx)\, x_1\, x_2\, x_3\, x_0 + \\ + (\mathrm{q}fx)\, x_2\, x_3\, x_0\, x_1 - (\mathrm{q}fx)\, x_3\, x_0\, x_1\, x_2\ ,\end{aligned}$$

. . . .

In generale

$$(Z_n fx)\, x_0\, x_1 \dots x_n = -(-1)^n (\mathfrak{a}/fx)\, x_0 \dots x_n - (\mathfrak{a}/fx)\, x_1 \dots x_0 -$$
$$-(-1)^n (\mathfrak{a}/fx)\, x_2 \dots x_1 - \dots - (\mathfrak{a}/fx)\, x_n \dots x_{n-1} \; .$$

Mediante gli operatori k_n si può scrivere

$$Z_n = -\sum_{0}^{n}{}_i (-1)^{n(i+1)}\, k^i_{n+1}\, \mathfrak{a} \; .$$

In particolare $Z_1 = (1 - k_2)\,\mathfrak{a}$ (come già sapevamo), $Z_2 = -(1 + k_3 + k_3^2)\,\mathfrak{a}$, $Z_3 = (1 - k_4 + k_4^2 - k_4^3)\,\mathfrak{a}$, ecc.

Ponendo $n = 0$ la formula darebbe $Z_0 = -\mathfrak{a}$. E' opportuno definire così anche Z_0, perchè tutte le formule valide in generale per Z_n sussistono ponendo $n = 0$ e $Z_0 = -\mathfrak{a}$.

Dimostriamo anzitutto che $(Z_n fx)$ è iperassiale d'ordine $n + 1$, ossia che, se $i_0\, i_1 \dots i_n$ è una permutazione dei numeri 0, 1, ..., n, si ha

$$(Z_n fx)\, x_{i_0}\, x_{i_1} \dots x_{i_n} = \pm (Z_n fx)\, x_0\, x_1 \dots x_n$$

col segno $+$ o $-$ a seconda che la permutazione è di classe pari o dispari. Operiamo dapprima la sostituzione circolare sugli $n + 1$ elementi che porta al primo posto i_0, e poi quella che mette a posto gli altri, e opera soltanto sugli n elementi successivi:

$$\begin{pmatrix} i_0\, i_1 \dots i_n \\ 0\ 1 \dots n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_0 & i_0 + 1 & & i_0 + n \\ 0 & 1 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ i_0 + 1 & \dots & i_0 + n \end{pmatrix}$$

(scrivendo $m = \text{rest}\,(m, n + 1)$ secondo la solita convenzione).

Si ha

$$(Z_n fx)\, x_{i_0}\, x_{i_0+1} \dots x_{i_0+n} = k^{i_0}_{n+1} (Z_n fx)\, x_0\, x_1 \dots x_n =$$
$$= -\sum_{0}^{n}{}_i (-1)^{n(i+1)}\, k_{n+1}{}^{i_0+i} (\mathfrak{a}/fx)\, x_0 \dots x_n =$$
$$= -\sum_{0}^{n}{}_h (-1)^{n(h-i_0+1)}\, k^h_{n+1} (\mathfrak{a}/fx)\, x_0 \dots x_n = (-1)^{ni_0} (Z_n fx)\, x_0 \dots x_n \;;$$

ni_0 è appunto pari o dispari insieme alla classe della sostituzione circolare.

Rimane a dimostrare che l'asserto vale relativamente alle permutazioni sugli indici successivi. Osserviamo che fx è per ipotesi un'iperassiale d'ordine n, e quindi $\text{Ɑ}fx$ è un' omografia che produce iperassiali d'ordine n; $(\text{Ɑ}fx)\, x_{i_0}$ è iperassiale d'ordine n, e quindi lo è anche $(Z_n fx)\, x_{i_0}$, con che l'asserto è dimostrato.

§. 9. — Per giustificare la formula generale

$$\int_\sigma f = \int_\tau Z_n f$$

procediamo come al § 7 considerando il prismetto a $n+1$ dimensicni $d\tau$ che ha per spigoli $d_0 P$, $d_1 P$, ..., $d_n P$, e orientato positivamente rispetto a questo ordine della successione. Le faccie del prisma sono $2(n+1)$ prismi ad n dimensioni due a due paralleli; ogni faccia si trasporta nella parallela spostandola di $d_i P$ (o $-d_i P$), ove $d_i P$ è l'unico spigolo del prisma che non è anche spigolo della faccia.

Occorre una convenzione per stabilire l'orientamento del contorno di una figura orientata; basterà stabilirla per un prisma. Siano $x_1 \ldots x_n$ gli spigoli di una faccia d'un prisma a $n+1$ dimensioni e x_0 lo spigolo non appartenente alla faccia, diretto nel verso tale da trasportarla nella faccia parallela. Diremo orientamento positivo della faccia quello corrispondente all'ordinamento $x_1 \ldots x_n$ o quello opposto a seconda che l'ordinamento $x_1 \ldots x_n x_0$ è positivo o negativo rispetto all'orientamento del prisma. Due faccie opposte (parallele) hanno sempre orientamento contrario.

L'integrate di $f(P)$ esteso al contorno del prisma $d\tau$ sarà una somma di termini del tipo

$$\begin{aligned} f(P) . d_{i+1} P . d_{i+2} P . \ldots . d_{i+n} P - f(P + d_i P) . d_{i+1} P . d_{i+2} P . \ldots . d_{i+n} P = \\ = -(\text{Ɑ}fP) . d_i P . d_{i+1} P . \ldots . d_{i+n} P \end{aligned}$$

presi con segno $+$ o $-$ a seconda dell'orientamento. La classe della sostituzione

$$\begin{pmatrix} i+1 & i+2 & \ldots & i \\ 0 & 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

è $n(i+1)$; sommando rispetto a tutte le coppie di faccie $(i = 0, 1, \ldots, n)$ con segno $(-1)^{n(i+1)}$ si ottiene appunto

$$\sum_0^n{}_i (-1)^{n(i+1)} \mathrm{k}^i_{n+1} (-\text{Ɑ}fP) . d_0 P . d_1 P . \ldots . d_n P = (Z_n fP) . d_0 P . d_1 P . \ldots . d_n P.$$

Sommando a tutti i primi $d\tau$, e eliminandosi anche qui il contributo delle faccie interne. e essendo σ il contorno di τ, si ha

$$\int_\tau Z_n f = \int_\sigma f \qquad c. v. d.$$

§ 10. Dalla formula precedente scende che

$$\int_\tau Z_n f$$

dipende soltanto dal contorno σ di τ. Come corollario: esso è nullo se τ è una figura chiusa (senza contorno).

Una funzione gx (iperassiale d'ordine n funzione del punto x) che gode di queste proprietà (conseguenze l'una dell'altra):

a) se τ' e τ'' sono figure regolari a n dimensioni col contorno in comune, è sempre

$$\int_{\tau'} g = \int_{\tau''} g \ ;$$

b) se τ è figura regolare a n dimensioni chiusa (senza contorno) è sempre

$$\int_\tau g = 0 \ ;$$

la diremo *esattamente integrabile sulle varietà a n dimensioni*. Per $n = 1$ si ha la definizione precedente.

Abbiamo quindi: qualunque sia f, $Z_n f$ è esattamente integrabile sulle varietà a $n + 1$ dimensioni.

Condizione necessaria e sufficiente perchè g sia esattamente integrabile sulle varietà a n dimensioni è ovviamente

$$\int_\tau Z_n g = 0$$

qualunque sia τ, ossia $Z_n g = 0$. Si ha quindi subito il teorema

$$Z_{n+1} Z_n f = 0 \ .$$

In particolare, per $n = 0$, $Z_1 Z_0 = - Z\mathfrak{a} = 0$, $Z\mathfrak{a} = 0$ (Cf. § 7).

Sappiamo anzi che se $Zf=0$, f è della forma $f=\varrho g$. Può anche affermarsi in generale che se $Z_{n+1}f=0$ esista g tale che $f=Z_n g$? Pur non essendo riuscito finora a dimostrarlo, sembra assai probabile sia vero sempre, come inducono a persuadersi alcuni casi particolari che rileveremo.

§ 11. Traduciamo questi risultati nel caso particolare dell'ordinario calcolo vettoriale (usando le notazioni di Burali-Forti e Marcolongo).

Quel che ci interessa mettere in luce è che gli operatori differenziali praticamente così importanti del calcolo vettoriale classico non sono che casi particolari dei nostri Z_n, e precisamente dei primi tre: Z_0, Z_1, Z_2. È chiaro che Z_3 ecc. non servono nello spazio ordinario, perchè in uno spazio a n dimensioni ogni iperassiale d'ordine $>n$ è identicamente nulla. Ma Z_3 comparirebbe appena si introducesse la quarta dimensione, e così via.

§ 12. Gli operatori che equivalgono a Z_1 sono rot e Rot; le differenze sono puramente formali.

Se $\boldsymbol{u}$ è un vettore funzione del punto P, $\boldsymbol{u}\times$ è un'omografia (fra vettori e scalari) funzione di P, e quindi $Z(\boldsymbol{u}\times)$ sarà un'iperassiale di 2° ordine, funzione di P, fra vettori e numeri. In altri termini

$$[Z\,.\,(\boldsymbol{u}\times)\,.\,P]\,\boldsymbol{xy}=\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\,\boldsymbol{x}\right)\times\boldsymbol{y}-\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\,\boldsymbol{y}\right)\times\boldsymbol{x}$$

è uno scalare funzione lineare alternata di $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$. Ma è noto che ogni funzione lineare alternata di $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, nell'S_3, è funzione lineare di $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}$, e che se $a(\boldsymbol{z})$ è uno scalare funzione lineare di $\boldsymbol{z}$ esiste ed è univocamente determinato un vettore $\boldsymbol{a}$ tale che $a(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{z}$. Esiste quindi un vettore, e lo si indica $\mathrm{rot}_P\,\boldsymbol{u}$, tale che

$$\mathrm{rot}_P\,\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=[Z\,.\,(\boldsymbol{u}\times)\,.\,P]\,\boldsymbol{xy}\,.$$

Se α è un'omografia vettoriale funzione del punto P,

$$(Z\alpha P)\,\boldsymbol{xy}=\left(\frac{d\alpha}{dP}\,\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{y}-\left(\frac{d\alpha}{dP}\,\boldsymbol{y}\right)\boldsymbol{x}$$

è per lo stesso motivo funzione lineare di $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}$: esiste quindi una e una sola omografia, e la si indica $\mathrm{K\,Rot}_P\,\mathrm{K}\alpha$, tale che

$$\mathrm{K\,Rot}_P\,\mathrm{K}\alpha\,(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})=(Z\alpha P)\,\boldsymbol{xy}\,.$$

§ **13.** Gli operatori che equivalgono a Z_2 sono div e grad.

Sia $\boldsymbol{u}$ un vettore funzione del punto P, e indichiamo u l'iperassiale tale che $u\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$. Avremo

$$(Z_2 u\mathrm{P})\boldsymbol{xyz} = -\left\{ \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{d\mathrm{P}}\boldsymbol{x}\right) \times \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z} + \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{d\mathrm{P}}\boldsymbol{y}\right) \times \boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{x} + \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{d\mathrm{P}}\boldsymbol{z}\right) \times \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \right\},$$

che è uno scalare funzione lineare alternata di $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. Ma allora si sa che esiste ed è univocamente determinato uno scalare, e lo indicheremo $-\operatorname{div}_{\mathrm{P}} \boldsymbol{u}$, tale che

$$-\operatorname{div}_{\mathrm{P}} \boldsymbol{u} . \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z} = (Z_2 u\mathrm{P})\boldsymbol{xyz} .$$

Se α è un'omografia funzione del punto P, e indichiamo a l'iperassiale tale che $a\,\boldsymbol{xy} = \alpha(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})$, avremo

$$(Z_2 a\mathrm{P})\boldsymbol{xyz} = -\left\{ \left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\boldsymbol{x}\right)(\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) + \left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\boldsymbol{y}\right)(\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{x}) + \left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\boldsymbol{z}\right)(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \right\},$$

funzione lineare alternata di $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. E esiste analogamente un vettore (univocamente determinato), che si indica $-\operatorname{grad}_{\mathrm{P}} \alpha$, tale che

$$-\operatorname{grad}_{\mathrm{P}} \alpha . \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z} = (Z_2 a\mathrm{P})\boldsymbol{xyz} .$$

Nel caso in cui m è uno scalare:

$$\operatorname{grad}_{\mathrm{P}} m \times = -Z_0 m\mathrm{P} .$$

Sostituire gli operatori ordinari ai Z_n significa dunque soltanto sfruttare i noti teoremi dell'Introduzione C. I, 9 dell'*Analyse Vectorielle Générale I* (Burali-Forti e Marcolongo) che permettono di sostituire, nell'S_3, scalari, vettori, omografie, ovunque si incontrino iperassiali di secondo e terzo ordine. Che ciò costituisca una semplificazione dal punto di vista pratico è indubbio; concettualmente però è più semplice la definizione dei Z_n, perchè vale non solo nell'S_3, ma in ogni spazio lineare, perchè non dipende dai concetti metrici, e mette più chiaramente in evidenza le analogie.

§ **14.** Al teorema

$$\int_\tau Z_n f = \int_\sigma f$$

corrispondono, nei casi citati i soliti:

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{u} \,.\, d\tau = -\int \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} \,.\, d\sigma$$

$$\int \operatorname{grad} \alpha \,.\, d\tau = -\int \alpha \boldsymbol{n} \,.\, d\sigma$$

$$\int \boldsymbol{u} \times dP = \int \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \,.\, d\sigma$$

$$\int \alpha \, dP = \int \mathrm{K} \operatorname{Rot} \mathrm{K} \alpha \boldsymbol{n} \,.\, d\sigma \ ,$$

al teorema

$$Z_{n+1} Z_n f = 0$$

i seguenti

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} m = 0$$

$$\mathrm{K} \operatorname{Rot} \mathrm{K} \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$$

$$\operatorname{grad} \mathrm{K} \operatorname{Rot} \mathrm{K} \alpha = 0 \ .$$

È noto che inversamente

$$\operatorname{grad} m \ , \quad \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \ , \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \ , \quad \mathrm{K} \operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha \ ,$$

sono gli integrali generali delle equazioni differenziali

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{x} = 0 \ , \quad \mathrm{K} \operatorname{Rot} \mathrm{K}\xi = 0 \ , \quad \operatorname{div} \boldsymbol{x} = 0 \ , \quad \operatorname{grad} \xi = 0 \ .$$

È questo il fatto che giustifica la supposizione del § 10: che $Z_n f$ sia l'integrale generale dell'equazione differenziale $Z_{n+1}\, x = 0$.

Roma, ottobre 1928 A. VI.
(Istituto Centrale di Statistica).