JFM 57.0608.07

de Finetti, B.

Sul significato soggettivo della probabilità. (Italian)

Fundamenta 17, 298-329.

Published: **1931**

Verf. verkettet die Begriffe Wahrscheinlichkeit und mathematische Erwartung wie folgt: Ein Ereignis E hat die Wahrscheinlichkeit p, wenn man mit gleicher Aussicht $1-p$ Einheiten gegen p Einheiten auf E und p Einheiten gegen $1-p$ Einheiten auf $\bar{E}$ wetten kann. Aus diesem Ansatz lassen sich die wesentlichen Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgern.

In der Arbeit findet sich ein sehr interessanter Gedanke, den Ref. aus dem Gedankenkreis des Verf. herauslösen und mehr theoretisch wiedergeben will:

Es ist nicht nötig, als Verknüpfungsoperation für die Maße zweier fremder Mengen die Addition zu wählen. Die Verknüpfung kann durch jede Funktion $S(\xi,\eta)$ – dabei seien ξ, η und ζ Maße paarweise fremder Mengen – mit folgenden sechs Eigenschaften vermittelt werden:

(1) $S(\xi,\eta)=S(\eta,\xi)$ (Symmetrie);

(2) $S(\xi,\eta)>S(\xi,\eta')$, wenn $\eta>\eta'$ (Monotonie);

(3) $S\{S(\xi,\eta),\zeta\}=S\{\xi,S(\eta,\zeta)\}$ (Assoziativität);

(4) $S(\xi,0)=\xi$;

(5) S ist stetig in ξ und η;

(6) setzt man $\xi_n=S(\xi_{n-1},\xi)$ und $\xi_0=\xi_1$, so strebt ξ_n über alle Grenzen (*Archimed*isches Axiom).

Solche Funktionen $S(\xi,\eta)$ sind z. B. (Maß des ganzen betrachteten Raumteils sei Eins):

$$\xi+\eta+\xi\eta,\ (\xi^\varrho+\eta^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}},\ \log(2^\xi+2^\eta-1):\log 2,$$
$$(\xi+\eta):(1+\xi\eta),\ \xi\sqrt{1-\eta^2}+\eta\sqrt{1-\xi^2},\cdots.$$

Verf. zeigt nun, daß, wenn in demselben Raum eine additive Maßtheorie vorgegeben ist, bei der die Mengen, die jetzt die Maße ξ und η hatten, die Maße x und y haben, stets eine monotone stetige Funktion φ existiert, so daß gilt:

$$\xi=\varphi(x),\quad \eta=\varphi(y),\quad S(\xi,\eta)=\varphi(x+y).$$

Es sind also alle diese scheinbar neuen Maßtheorien nur Umrechnungen der üblichen, wie ja auch zu erwarten war, da sonst gänzlich neuartige Integralbegriffe definiert werden könnten.

Übrigens ist die Bedingung (6) des Verf. unnötig, wie Ref. aus eigenen, unveröffentlichten Untersuchungen über diese Fragen weiß. Jede beschränkte, wesentlich monotone Funktion ist nämlich "gleichmäßig monoton", d. h. zu jedem $\sigma>0$ gibt es ein $\varrho=\varrho(\sigma)>0$, so daß aus $f(y)-f(z)>\sigma$ stets folgt: $f(x+y)-f(x+z)>\varrho$. Dies genügt aber, um die Existenz der genannten Funktion φ zu sichern. (IV 3 C.)

Tornier, E.; Prof. (Berlin)

Cited in