STATISTICA E PROBABILITÀ NELLA CONCEZIONE DI R. VON MISES

In: «*Supplemento Statistico ai Nuovi Problemi di Politica Storia ed Economia*»,
Ferrara, 1936, Anno II, Fasc. 2-3, pp. 5-15

BRUNO DE FINETTI

STATISTICA E PROBABILITÀ NELLA CONCEZIONE DI R. VON MISES

S. A. T. E. - FERRARA 1937-XV
SOCIETÀ ANONIMA TIPOGRAFICA EMILIANA

Estratto dal "**Supplemento Statistico**" ai "Nuovi Problemi di Politica Storia ed Economia", fascicolo 2-3, Anno II, 1936-XV

È uscita di questi giorni la seconda edizione dell'opera « Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit », [1] in cui R. von Mises riesce ad esporre chiaramente, con grande abilità, la sua concezione della probabilità e della statistica, senza alcun uso di formule nè di concetti matematici non strettamente elementari. Rileggendo il volume, sono rimasto, come anni or sono, colpito dal singolare alternarsi di parti che concordano perfettamente col mio più volte esposto punto di vista, e di altre che ne sono addirittura agli antipodi. Generalmente, la concordanza ha luogo nella critica della definizione classica e nell'enunciazione dei principî generali cui la ricostruzione deve ispirarsi per non essere priva di senso. La discordanza sta nel modo della ricostruzione del von Mises, che mi sembra non regga affatto meglio della teoria classica alle stesse critiche da lui a questa rivolte, e cui intendeva riparare.

1. — *La concezione di Mises.*

La statistica è lo studio dei fenomeni di massa ricondotti al calcolo delle probabilità attraverso il concetto di « Kollektiv ».

L'oggetto del calcolo delle probabilità sono le successioni soddisfacenti le due seguenti proprietà, successioni cui appunto si attribuisce il nome di « Kollektiv »:

1) le frequenze con cui ciascuno dei risultati possibili si presenta nelle prime n prove, tendono a dei valori limite — detti frequenze-limite o *probabilità* — quando n cresce indefinitamente;

2) tali frequenze-limite rimangono inalterate se, invece di considerare tutte le prove della successione primitiva, se ne estrae una qualunque sottosuccessione fissando comunque il rango dei termini da conservare. Questa seconda proprietà è detta « Regellosigkeitsaxiom » (postulato di non-regolarità), od anche « principio dell'esclusione di un sistema di gioco », in quanto esso equivale a dire

[1] Edizione Julius Springer, Wien, nella collezione « Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung » (1ª ed. 1928, 2ª ed. rielaborata 1936).

che nessun « sistema di gioco » può alterare alla lunga i risultati. L'esistenza di successioni soddisfacenti queste proprietà, e l'interesse del loro studio, sono dimostrati dall'esperienza, cogli stessi caratteri d'imprecisione o incertezza con cui sono in genere dimostrabili i presupposti sperimentali di una teoria matematica di fatti empirici. Compito del calcolo delle probabilità per sè stesso è lo studio delle conseguenze formali delle due condizioni della definizione.

Prendiamo ad esempio il gioco di testa e croce: una successione indefinita di prove si considera un « Kollektiv » in quanto le nozioni sperimentali circa la stabilità della frequenza e l'irregolarità del succedersi dei due diversi risultati rendono plausibili le analoghe ammissioni per la successione illimitata; l'« irregolarità », quale fu definita, consiste nel fatto che anche nella sottosuccessione ottenuta considerando ad es. una prova ogni due, costituita cioè dalle prove di rango pari, la frequenza-limite rimane la stessa, e così per la successione delle prove di rango multiplo di 3, oppure numero primo, oppure numero quadrato, oppure successive a una prova il cui esito fu « testa », ecc. ecc. Nell'esempio i risultati possibili sono due: è questo, di un « Kollektiv » *alternativo*, il caso più semplice possibile (si avrebbero invece ad es. sei risultati con un dado, novanta in un'estrazione del lotto, e così via).

2. — *Obiezione sulla sensatezza intrinseca della teoria.*

Intendo sopratutto chiarire il mio pensiero sull'aspetto concettuale e pratico della teoria di von Mises; mi sia tuttavia permesso ripetere e chiarire preliminarmente un'obiezione che riguarda la sensatezza del concetto di « irregolarità » per sè stesso (1). Tale concetto non apparve del resto soddisfacente neppure ai seguaci del von Mises, che cercarono di restringerlo: può infatti avvenire che la frequenza-limite rimanga la stessa su tutte le sottosuccessioni appartenenti a una ben determinata categoria, ma non su tutte. Fra tutte le sottosuccessioni esiste infatti ad esempio anche quella di tutte le prove che hanno dato un medesimo risultato (frequenza-limite = 1 !), e non vale escludere la facoltà di introdurla definendola esplicitamente in base a questa sua proprietà, perchè, anche indipendentemente da questo modo di nominarla, essa appartiene alla classe di « tutte » le successioni. Il concetto ha senso soltanto se e in quanto esso sia definito in modo da consentire la divisione della classe delle successioni in due categorie: successioni *regolari* e *irregolari* (e la teoria ha senso solo se,

(1) L'obiezione era accennata nella mia nota *Sul concetto di probabilità*, « Riv. It. Statistica, Econ. e Fin. », A. V, n. 4, 1933-XII.

inoltre, tale definizione rende compatibili i due postulati); se si studiano, e quindi si suppone esistano, successioni « irregolari », non si può affermare contemporaneamente che « tutte » le successioni, comunque definite, sono « regolari ». Bisogna almeno supporre (a non volersi preoccupare di questioni analoghe al paradosso di Richard) che le successioni regolari siano quelle di cui sia definibile « con un numero finito di parole, od operazioni » la legge di formazione.

Sia ad es. S_k ($k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$) la successione dei ranghi occupati da cifre pari nell'espressione decimale di $k\pi$; se solo si ammette che le successioni S_k sono regolari, qualunque successione di prove in numero finito può considerarsi regolare, potendosi sempre trovare una e anzi infinite S_k di cui costituisce il tratto iniziale (e le S_k potevano definirsi con illimitata arbitrarietà di modi portando alla stessa conclusione). In altre parole, esaminando se sarebbe convenuto seguire uno dei « sistemi di gioco » espressi dagli S_k, se ne troverebbero certo sempre di quelli che avrebbero fatto « indovinare » esattamente ogni prova.

D'ora in poi non cureremo però ulteriormente tale obiezione, supponendo, per poter entrare nel vivo della questione, che il concetto discusso sia già stato reso sensato grazie a opportune precisazioni [1].

3. — *La frequenza-limite e il teorema di Bernoulli.*

Il punto « cruciale », o, ad ogni modo, il punto che permette colla maggiore immediatezza di rendersi conto esattamente della posizione mentale di von Mises nei riguardi della teoria classica, e della posizione mia nei riguardi di quello e di questa, è dato dalla discussione sul significato del teorema di Bernoulli (e delle sue generalizzazioni, da Poisson a Tchebycheff, da Cantelli a Khintchine) in relazione al postulato della frequenza-limite.

Nella teoria classica si definisce la probabilità partendo dal noto schema dei « casi ugualmente possibili », e il fatto che la frequenza, in una prolungata ripetizione di prove, tenda, in un certo senso, verso la probabilità, viene *dimostrato*: questo è l'ufficio del teorema di Bernoulli e delle sue generalizzazioni, che vengono così a costituire un « ponte » fra il caso dei giochi ove la definizione classica è diretta-

[1] Non è, quella sviluppata, l'unica obiezione contro la sensatezza intrinseca della teoria. Se si passa ad es. al caso di un « Kollektiv » continuo, soltanto un'infinità numerabile di valori distinti può al più figurare nella successione, e non risulta quindi possibile considerare una distribuzione di probabilità nel continuo che attribuisca, come generalmente si ammette, una probabilità nulla ad ogni sottoclasse di misura nulla, e nemmeno ad ogni sottoclasse numerabile.

mente applicabile, e quello delle applicazioni statistiche, ove le probabilità sono dedotte da osservazioni di frequenze.

Rinviando a più tardi le critiche di von Mises alla definizione classica per sè stessa, occupiamoci subito di quelle rivolte contro l'attribuzione di tale ufficio al teorema di Bernoulli. Secondo von Mises, tale teorema, nella formulazione della teoria classica, dice soltanto che uno scarto (fra probabilità e frequenza) superiore a un certo limite ε ha una piccolissima probabilità, intendendo per « probabilità » il rapporto della definizione classica; per darne l'interpretazione desiderata occorre invece trasmutare questo significato meramente aritmetico di « piccolissima probabilità » in quello di « impossibilità pratica », il che significa null'altro che cadere in un equivoco, interpretando il concetto di probabilità in un senso che non ha alcun nesso colla definizione da cui si è partiti, e che è soltanto suggerito dal diverso uso della parola nella vita pratica. Secondo von Mises, si hanno invece due enunciati ben distinti: il postulato della frequenza-limite, non teorema ma presupposto giustificabile sperimentalmente, e i teoremi corrispondenti a quello di Bernoulli e analoghi, salvo l'enunciazione riferita al « Kollektiv », che dimostrano la « impossibilità pratica » di scarti superiori ad ε in quanto dimostrano che, formata una successione (Kollektiv) di serie di prove, le serie con scarto $>\varepsilon$ vi sono assai rare (hanno piccolissima frequenza-limite) (¹).

Secondo il mio punto di vista, von Mises ha perfettamente ragione nella parte negativa: chi per definizione *identifica* la probabilità col rapporto della teoria classica, non può uscire dalla prigione in cui si è rinchiuso e avvicinare comunque la probabilità alla « certezza pratica » o « impossibilità pratica ». Ma altrettanto avviene per chi identifichi la probabilità colla frequenza-limite; egli potrà dire, nel caso in questione, che ripetendo infinite volte la serie di prove gli scarti $>\varepsilon$ si presenteranno con frequenza-limite piccolissima, ma non può vantare alcun maggiore diritto del seguace della definizione classica a proclamare « praticamente certo » il risultato di prove singole o in numero finito. Se egli infatti basa la sua « certezza pratica » sul fatto che ad es. soltanto una prova su mille, in media, risulta contraria, egli segue in sostanza la stessa idea di chi la basa sul fatto che soltanto una pallina su mille, nell'urna, è nera.

4. — *Definizione di probabilità e valutazione di probabilità.*

Hanno dunque entrambi torto? Secondo me, sì, ma soltanto in quanto e fintantochè le due opposte « definizioni » si considerino trop-

(¹) Su tale questione vedansi anche le due note di R. VON MISES e di F. P. CANTELLI in « Giorn. Ist. It. Attuari », A. VII, n. 3, 1936-XIV.

po rigidamente come tali. Ciascuna delle due definizioni mutila e svisa il concetto che vorrebbe definire, tanto che, per dar senso ai risultati, occorre falsare il significato quale legittimamente corrisponderebbe alla definizione stessa. Sarebbe come *definire* la temperatura quale « numero segnato dal termometro »: evidentemente, non si avrebbe allora diritto di parlare della temperatura in una stanza senza termometro.

Se però queste pretese definizioni si considerano più modestamente come criteri per la valutazione pratica della probabilità in certi tipi di problemi, allora tutto si accomoda. Così appunto si deve procedere secondo il mio punto di vista: la probabilità si definisce come grado soggettivo di convincimento di un dato individuo nell'avverarsi di un determinato evento (evento singolo, non « evento ripetibile », « Kollektiv », o altro); si fissano, giustificandole psicologicamente, le condizioni sotto le quali un individuo si considera « coerente » [1]; se ne deducono delle conclusioni che permettono di giustificare le « definizioni » basate sui « casi ugualmente probabili » e sulle frequenze, non come definizioni, ma come criteri pratici di valutazione [2]. La prima si applica utilmente quando esista una divisione in casi che l'individuo giudichi « ugualmente probabili »: la misura quantitativa della probabilità viene così ricondotta al giudizio puramente qualitativo dell'uguaglianza fra probabilità (sempre in senso soggettivo). L'altra è d'ausilio nei casi in cui per l'individuo riesca più facile giudicare della probabilità dalle diverse frequenze possibili in un insieme di eventi le cui probabilità egli giudichi non troppo diverse. Sono, questi criteri, come dei « termometri », che possono servire a misurare numericamente la temperatura di un dato ambiente, ma la cui esistenza o la cui applicazione non sono presupposti perchè il concetto di « temperatura di un ambiente » abbia senso e sia lecito parlarne.

Bisogna dunque ancorarsi esplicitamente, nella definizione della probabilità, a quello che è il senso usuale della parola, e al quale finiscono per dover ricorrere illegittimamente coloro che vorrebbero bandirlo ritenendo più scientifiche e pure altre definizioni per il solo motivo che sono vuote. Analizziamo ad esempio cosa accade a von Mises. Egli deve valutare la probabilità di un « Kollektiv » in base ad osservazioni di frequenza su un numero finito di prove, e lo

---

[1] Cfr. in particolare la mia memoria *Sul significato soggettivo della probabilità*, « Fundamenta Mathematicae », T. XVII, Warszawa, 1931.

[2] Tale concetto ho particolarmente sviluppato nella seconda delle conferenze tenute all'Institut Poincaré di Parigi nel 1935 su *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives* (in corso di stampa negli Annales de l'Inst. Poincaré).

fa ritenendo *probabile* (nel senso usuale !) che la frequenza-limite sia praticamente uguale alla frequenza osservata. Poi eseguisce i calcoli formali, dove pure, qualora intervengano ipotesi speciali, esse sono ammesse giudicandole *probabili* (nel senso usuale !) in base ad esperienze nel finito. Giunto ai risultati, per interpretarli, deve rifare il passaggio inverso, giudicando *probabili* (nel senso usuale !) certe previsioni relative a un numero finito di prove. Per non ragionare direttamente, come io sostengo si debba, sulle entità soggettive che effettivamente interessano, e in base alle loro proprie leggi, ci si riduce così a trasportare il ragionamento in un campo di entità fittizie, non per eliminare l'insopprimibile sostanza soggettiva delle questioni, ma per mascherarla inavvertitamente col relegarla nei momenti dell'impostazione e dell'interpretazione del risultato. In questi momenti, che sono un po' al di fuori dello svolgimento matematico, sembra infatti a taluni meno illecito far passare di contrabbando interpretazioni illegittime, anche per l'analogia con le teorie matematiche di fatti sperimentali, dove l'accordo colle osservazioni empiriche è riscontrabile soltanto in modo approssimato.

Ma bisogna osservare due diversità essenziali che tolgono ogni valore all'apparente analogia. Primo: negli altri casi, la teoria dice come i fatti *dovrebbero* andare teoricamente, e l'osservazione ha solo da constatare il più o meno stretto accordo colla realtà osservata; invece il calcolo delle probabilità non afferma nulla di nulla circa tutto quello che si può osservare in un tempo finito (e ciò secondo nessuna delle concezioni accennate: quella di Mises, la classica, la soggettiva), e non ha pertanto alcun senso neppure parlare di accordo o disaccordo coi fatti [1]. Secondo: qualora negli altri campi accada di accettare una qualunque premessa ritenendola « plausibile », « verosimile », « probabile », si premette con ciò il concetto di probabilità soggettiva; nel caso delle probabilità ciò non si può fare, quando

---

[1] Questo stesso concetto è stato chiaramente espresso, sotto forma diversa, che penso utile riportare, in una recente Nota di K. DÖRGE (*Ueber das Anwendungsproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Induktionsproblem*, « Deutsche Mathematik », 1, 1936): « Ogni affermazione di questo genere (cioè affermazioni basate sul calcolo delle probabilità, e relative alle frequenze o in genere all'andamento obbiettivo di una serie di prove) conduce a un assurdo *contro la teoria* delle probabilità, cioè a una conclusione che risulta a priori assurda alla nostra mente, e non solo che può apparire tale (cioè, come si direbbe più comunemente, « essere smentita ») in dipendenza dal reale svolgersi di avvenimenti esterni a noi ». Il modo con cui il D. cerca poi di rimediare alla difficoltà è molto lontano dalla mia concezione; tuttavia è sintomatico il fatto che egli sente la necessità di modificare profondamente le concezioni usuali riconoscendone la contraddittorietà.

si pretenda appunto di dare alla probabilità un significato non soggettivo.

5. — *Sul concetto di «Kollektiv».*

Abbiamo ora gli elementi per esporre più proficuamente delle osservazioni sullo stesso concetto, fondamentale per von Mises, di « Kollektiv ».

Per dare al concetto di probabilità un significato che vorrebbe essere *concreto*, il von Mises prolunga idealmente all'infinito ogni gruppo, necessariamente finito, di prove osservate, e ragiona sulla frequenza-limite di cui ammette l'esistenza. Ma quanto non v'è d'arbitrario, prima ancora che nella previsione della frequenza-limite, nel raggruppamento delle prove osservate, e, sopratutto, nel prolungamento di un gruppo in una serie infinita! Questa serie infinita è costituita di prove ben definite che realmente avverranno, oppure di prove immaginarie? Nel secondo caso, ogni ombra di concretezza per il concetto e il valore della frequenza-limite svanisce senz'altro. Nel primo si pone la grave questione di delimitare esattamente queste prove. Per la validità formale della teoria, è ovvio che la prolungazione può essere arbitraria: se, a un miliardo di prove a testa e croce, si fanno seguire infinite prove di ottenere un doppio sei con due dadi, le due proprietà caratteristiche del « Kollektiv » rimangono soddisfatte, supposto lo siano per la successione dei giochi coi dadi; se la frequenza-limite è, ad es., 1/36, potrei dire che la probabilità di « testa » è 1/36 in quanto intendo prolungare il miliardo di prove a testa e croce nel modo spiegato. Non dubito che quel modo non corrisponda alle intenzioni di von Mises, ma è certo che non lo si può escludere con ragioni che abbiano il loro fondamento nella sua teoria. Se egli dice che qui si tratta di prove di due « eventi » distinti, anzichè sempre dello stesso « evento », egli non può che appellarsi ad un criterio di analogia esteriore, abbastanza chiaro, volutamente, nell'esempio, ma vago e inafferrabile nei casi pratici. La morte di un individuo, classificabile secondo molteplici caratteristiche, in quanti « Kollektivs » non può essere classificata? E con quale arbitrarietà non si può quindi definire la successione di anni-individui futuri che si debbono accodare a quelli osservati per rendere infinito il gruppo? Ammesso che a tale proposito qualcosa di relativamente sensato si riesca a dire, si dirà sempre, senza volerlo, che le singole prove debbono essere ugualmente probabili e indipendenti, mentre, secondo

Mises, parlare di probabilità in una singola prova sarebbe privo di senso [1].

In casi appena un po' complessi, come quelli, accennati nel libro citato di Mises, delle prove interdipendenti e dell'inversione del toerema di Bernoulli, il riferimento al « Kollektiv » diventa talmente artificioso da rendere incredibile che in pratica l'impostazione effettiva di un problema possa farsi trovando interpretazioni non assolutamente immaginarie della ricca superfetazione di « Kollektivs » sotto cui viene presentata.

Come già aveva osservato il Kries, non si può parlare della probabilità di un insieme di eventi, di un insieme di prove, ma soltanto della probabilità di un caso singolo. Posso giudicare — egli dice — che Caio abbia una data probabilità di morire entro un anno da oggi, ma se parlo della probabilità analoga « per un individuo di 40 anni », l'espressione è impropria. Può significare solo che a ciascun individuo di 40 anni attribuisco quella medesima probabilità di morire (oppure, aggiungo io, può trattarsi di una « media »; così quando si parla della « statura di un gruppo di persone o di una popolazione », s'intende impropriamente, o la statura comune, o qualcosa di vago significante all'incirca « statura media »). Vediamo ora che, volendo definire la probabilità solo nei « Kollektivs », se non si vuole che la teoria formale perda ogni possibilità sia pure apparente di applicabilità, è giocoforza costruire i « Kollektivs » in base alla eguale probabilità delle singole loro prove.

6. — *La giustificazione del ragionamento induttivo.*

Se al calcolo delle probabilità si attribuisce un valore filosofico essenziale, non può essere altro che assegnandogli il compito di approfondire spiegare o giustificare il ragionamento per induzione. Ciò il Mises non fa, perchè ammette esplicitamente di premettere alla teoria delle probabilità, come fondamento delle stesse definizioni, i risultati di osservazioni empiriche: con ciò, egli presuppone la persuasione che i fatti osservati contengano qualcosa da poter assumere in un certo senso come norma generale, come elemento stabile su cui costruire una teoria utilizzabile anche in futuro. Tale osservazione sarebbe solo a metà una critica a Mises: voler coscientemente limi-

[1] Una più diffusa critica di molte difficoltà e incongruenze derivanti, nell'applicazione pratica del calcolo delle probabilità nel campo assicurativo, dalle manchevolezze qui rilevate e da altre analoghe della concezione di von Mises si troverà nella comunicazione che presenterò all'XI Congresso Internazionale degli Attuari (Parigi, 1937-XV), tema sesto, dal titolo « Riflessioni teoriche sulle assicurazioni elementari ».

tare il campo di una teoria a una certa sua parte, per es. escludendo quanto concerne i fondamenti filosofici, potrebbe soltanto dirsi poco opportuno, ma non erroneo, qualora la voluta separazione non svuotasse i problemi di ogni non illusorio legame col loro significato effettivo.

Voglio toccare questo punto perchè il Reichenbach ([1]), pur accettando in gran parte l'impostazione di Mises, mostra invece di comprendere che fine principale della teoria delle probabilità deve essere la giustificazione del ragionamento induttivo (« Induktionsschluss »). Reichenbach ragiona così: se in una successione esiste la frequenza-limite, esiste per definizione un n tale che al di là di esso la frequenza coincide, con un grado d'approssimazione comunque prefissato, con la frequenza-limite. Ora, o la frequenza-limite non esiste, o le prove osservate sono in numero insufficiente (minore di n), o in numero sufficiente (almeno n); nei primi due casi non posso concludere nulla, nel terzo posso concludere che anche in futuro la frequenza su di un sufficiente numero di prove coinciderà praticamente con quella osservata in precedenza. A un tale ragionamento non posso non obbiettare che a nulla mi giova sapere che « solo nel terzo caso posso concludere qualcosa »: per poter aver fiducia, ossia ritener probabile (nel senso usuale !), che la conclusione sia giusta, debbo supporre inoltre che il terzo caso sia probabile (nel senso usuale !). Altrimenti potrei ragionare come segue, per conoscere l'iniziale del nome di un passante sconosciuto: o egli si chiama Giacobbe oppure non si chiama Giacobbe; dalla prima ipotesi posso concludere che l'iniziale è G, dalla seconda non posso concludere nulla, quindi devo supporre che l'iniziale sia G.

Al pari di quello di Reichenbach, nessun altro ragionamento può logicamente concludere nulla riguardo al comportamento futuro basandosi sul comportamento passato, ed anzi, per sè stesso, il comportamento passato non può neppure giustificare l'attribuzione di una certa probabilità soggettiva ad un comportamento futuro qualsiasi. La teoria soggettiva sfugge a tale errore in quanto chiarisce e vuol chiarire soltanto i motivi soggettivi che rendono ragione del ragionamento per induzione: essa mostra cioè che, sotto condizioni molto ampie per l'opinione soggettiva iniziale, l'influenza del comportamento passato sul giudizio di probabilità nel futuro risulta automaticamente conforme ai principî del ragionamento induttivo. Tale dimo-

---

([1]) H. Reichenbach, *Wahrscheinlichkeitslehre*, Sijthoff, Leiden, 1935; cfr. anche due comunicazioni del R., e le critiche contenute in una mia, al Congresso Int. di Filosofia Scientifica (Parigi, 1935). (Atti pubblicati nelle « Actualités Scientifiques et Industrielles », n. 392, Hermann ed., Paris 1936).

strazione corrisponde al ragionamento classico per la « inversione del teorema di Bernoulli », che va però completamente rimaneggiata perchè concetti ed entità che in essa intervengono (sia secondo la formulazione classica che secondo quella di Mises) cessano di avere senso adottando il punto di vista soggettivo. Sarebbe troppo lungo e condurrebbe troppo lontano un cenno che entrasse nel merito di questo problema, che ho del resto più volte lumeggiato [1].

7. — *Le critiche alla definizione classica.*

Ho esposto così alcune delle principali critiche alla concezione di von Mises; non sembrerà però strano che, data la diversità di concezione, ad ogni pagina del suo libro potrebbe corrispondere una pagina di critica secondo il mio punto di vista, e che la difficoltà stava soltanto nella scelta giudiziosa di pochi punti fondamentali, tali da lumeggiare nel miglior modo le reciproche posizioni. In sostanza ho criticato la definizione di Mises mostrando che, per liberare il campo delle probabilità dalla prigione costituita dalla troppo arida e vuota definizione classica, lo rinchiude in un'altra che non meno della prima preclude ogni infiltrazione di ciò che dei problemi costituisce la sostanza vitale. Ciò non toglie che molte delle critiche rivolte alla definizione classica, e delle conclusioni sostenute in opposizione ad altre anteriori, concordino con quelle mie ispirate al punto di vista soggettivo.

Mi limito ad accennare le critiche, che potrei sottoscrivere in pieno, contro l'usuale introduzione dei « casi ugualmente probabili », contro l'assegnazione di un ruolo eccezionale ai problemi ove tale schema di casi ugualmente probabili si ritiene applicabile, contro i ragionamenti « per analogia » in genere, e in particolare contro quello che, dopo aver definito la probabilità solo in base e subordinatamente al sunnominato schema, pretenderebbe allargare il campo, grazie a un'« analogia », ai casi in cui la definizione è inoperante.

Sono d'accordo che per il calcolo delle probabilità il valore delle singole probabilità è indifferente, e anzi in un senso concettualmente più spinto: è ad es. indifferente, per me, che un individuo sia « normale » e reputi ugualmente probabili i 90 numeri del lotto, oppure sia « superstizioso », e attribuisca una grande probabilità a dei numeri visti in sogno; quello che deve rimanere sono soltanto le leggi matematiche con cui tali giudizi vengono combinati per ottenere altri giudizi. L'opinione del Mises è, nelle sue conseguenze matematiche, la stessa;

[1] Cfr. specialmente le già citate conferenze all'Inst. Poincaré.

soltanto, egli non parla di opinioni ma di frequenze-limite, ed è per le frequenze-limite dei 90 numeri che egli sosterrebbe, nell'esempio del lotto, essere indifferente per la teoria della probabilità che esse abbiano dei valori diversi qualunque, oppure siano tutte uguali a 1/90 come nell'unico caso speciale considerato espressamente nella teoria classica. Dal punto di vista matematico-formale, è però chiaro che queste due formulazioni coincidono perfettamente: la differenza non è che nell'interpretazione concettuale.

E, per finire, segnalo ancora la concordanza circa un teorema particolare: l'estensione del teorema delle probabilità totali alle classi numerabili, sostenuta da molti autori, non risulta giustificata per contro nè secondo la teoria di von Mises nè secondo il mio punto di vista ([1]).

Trieste, 8 agosto 1936/XIV.

([1]) Cfr. particolarmente *Les probabilités nulles* (« *Bull. Sciences Mathématiques* », in corso di stampa).