Prefazione

> La direzione della scienza è determinata dalla nostra immaginazione creativa e non dall'universo di fatti che ci circonda.
>
> IMRE LAKATOS, *La metodologia dei programmi di ricerca scientifici*

1. *Il calcolo delle probabilità come logica dell'incerto*

La logica dell'incerto riguarda le regole che dovremmo seguire per ragionare e agire in tutte quelle situazioni in cui l'incompletezza delle informazioni a nostra disposizione non ci consente una predizione certa del futuro. Dunque, essa riguarda la maggior parte dei problemi che incontriamo sia nella vita quotidiana che nella pratica scientifica. Leibniz ne lamentava la mancanza ancora nel 1706 (nei *Nuovi saggi sull'intelletto umano*)[1] e Hume pensava di aver almeno parzialmente colmato questa lacuna con il suo *Trattato sulla natura umana* del 1739.[2] In realtà, Pascal già intorno al 1660 aveva compreso con molta chiarezza nei suoi *Pensieri* quale doveva essere la logica dell'incerto:

> se si dovesse agire solo per ciò che è certo, per la religione non si dovrebbe fare nulla, perché essa non è certa. Ma quante cose facciamo per l'incerto! [...] Ordunque quando lavoriamo per il domani, e per l'incerto, ci comportiamo ragionevolmente; *perché si deve agire per l'incerto in base al calcolo delle probabilità* [règle des partis], *calcolo dimostrato.*[3] (Corsivo nostro.)

In breve, per Pascal la logica dell'incerto si riduce al calcolo delle probabilità. Così, il calcolo delle probabilità nasce preci-

[1] Libro IV, cap. II, par. 14.
[2] Nel suo *An Abstract of a Treatise on Human Nature*, Archon Books, Hamden, Connecticut, 1965, pp. 7-8.
[3] È il pensiero 234 dell'edizione Brunschvicg nella traduzione di Devizzi, Istituto Editoriale Italiano, Milano, 1949. In tutte le edizioni segue immediatamente il pensiero *Infinito-nulla*, il pensiero della famosa scommessa di Pascal.

samente come guida per ragionare e agire in condizioni di incertezza ed è Pascal stesso nel famoso pensiero *Infinito-nulla* a dare la prima applicazione di questo punto di vista a un problema concreto.[4]

2. *L'urna di Laplace e il teorema di Bayes*

L'intuizione di Pascal guidò gli sviluppi straordinariamente fecondi del calcolo delle probabilità fino al 1827.[5] Abbiamo preso il 1827 come il punto terminale di questa prima fase della storia del calcolo delle probabilità poiché è l'anno della morte del suo massimo protagonista: Laplace. È già nel suo primo saggio su questo argomento (*Saggio sulla probabilità delle cause in base agli avvenimenti*, 1774) che Laplace deduce un caso speciale del principio del calcolo delle probabilità che costituisce la regola fondamentale per ogni ragionamento in condizioni di incertezza. La sua formulazione generale si trova nella successiva *Teoria analitica delle probabilità* (1812). Così Laplace presentava nel saggio del 1774 il problema cui il principio in questione dava una soluzione:

> L'incertezza delle conoscenze umane verte sugli avvenimenti o sulle cause di essi; se, per esempio, si sa che un'urna racchiude dei biglietti bianchi e neri in un rapporto dato, e si chiede la probabilità di estrarre, a caso, un biglietto bianco, l'avvenimento è incerto, ma non lo è la causa da cui dipende la probabilità della sua esistenza, vale a dire il rapporto tra i biglietti bianchi e quelli neri. Nel seguente problema è noto l'avvenimento, mentre ne è sconosciuta la causa: *data un'urna che racchiude biglietti bianchi e neri in un*

[4] Si veda il cap. 8 di I. Hacking, *L'emergenza della probabilità*, il Saggiatore, Milano, 1987. Per la questione della nascita della probabilità si veda ancora Hacking, *cit.* Ma per una recensione critica si vedano D. Garber e S. Zabell, *On the emergence of probability*, «Archive for the history of exact sciences», 21, 1979, pp. 33-53. Osservazioni interessanti su queste questioni si trovano in R. Jeffrey, *An assessment of the subjectivistic approach to probability*, «Epistemologia», 7, 1984, pp. 9-29. Si noti che il punto di vista di Pascal è sviluppato in quegli stessi anni dal suo amico Arnauld in particolare nel cap. 16 di *La logique, ou l'art de penser*.

[5] Una storia (molto erudita) di questa prima fase si trova nel classico I. Todhunter, *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace*, Londra, 1865. Più interessante la storia raccontata nella prima parte di Stigler, *The history of statistics*, Harvard University Press, Cambridge Mass., 1986.

> *rapporto non noto, determinare la probabilità che tale rapporto sia di* p *a* q, *quando sia stato estratto un biglietto e questo sia bianco.*[6]

Per fissare le idee, consideriamo un caso particolare di questo problema che ci condurrà subito alla difficoltà che determinò il declino del paradigma Pascal-Laplace (calcolo delle probabilità = logica dell'incerto) nella seconda metà dell'800.

Supponiamo che l'urna racchiuda due soli biglietti. Allora, le sue possibili composizioni sono solo tre: (1) entrambi i biglietti bianchi (per cui $p = 2$ e $q = 0$, che dunque indichiamo con $[2,0]$); (2) un biglietto bianco ed uno nero (per cui $p = 1$ e $q = 1$, che dunque indichiamo con $[1,1]$); (3) entrambi i biglietti neri (per cui $p = 0$ e $q = 2$, che dunque indichiamo con $[0,2]$).

Indichiamo con $\mathrm{Prob}([p,q] \mid B)$ la probabilità della generica composizione $[p,q]$ quando sia stato estratto un biglietto bianco (tale probabilità veniva detta probabilità *a posteriori* di $[p,q]$, dato B), con $\mathrm{Prob}(B \mid [p,q])$ la probabilità di estrarre un biglietto bianco quando la composizione dell'urna è $[p,q]$ (tale probabilità viene detta *verosimiglianza* di $[p,q]$ per B), e infine con $\mathrm{Prob}([p,q])$ la probabilità della generica composizione $[p,q]$ *prima* di aver fatto l'estrazione del biglietto (tale probabilità veniva detta probabilità *a priori* di $[p,q]$).[7]

Laplace stabilisce allora il seguente principio:

$\mathrm{Prob}([p,q] \mid B)$ è proporzionale al prodotto $\mathrm{Prob}([p,q]) \times \mathrm{Prob}(B \mid [p,q])$, e cioè la probabilità a posteriori di $[p,q]$ dato B è proporzionale alla sua probabilità a priori moltiplicata per la sua verosimiglianza per B.

È questo il principio oggi noto come *teorema di Bayes*.[8]

[6] Si veda Laplace, *Opere*, a cura di O. Pesenti Cambursano, UTET, 1967, p. 173.

[7] Per questa terminologia si veda la nota a p. 99 di questo volume.

[8] In effetti, Thomas Bayes aveva dimostrato un risultato connesso a quello di Laplace nella memoria pubblicata postuma – nel 1763 – dal suo amico Richard Price, dal titolo *An essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances*. Una ristampa accessibile si trova in E.S. Pearson e M. Kendall, a cura di, *Studies in the history of statistics and probability*, vol. I, Griffin, Londra, 1970, pp. 131-154. Per la relazione tra i due risultati, si vedano ad esempio S. Stigler, *op. cit.*, cap. 3, pp. 99-138 e A.I. Dale, *Bayes or Laplace? An examination of the origin and early applications of Bayes' theorem*, «Archiv for the History of Exact Sciences», 27, pp. 23-47.

Ora, nessuno di voi (anche se poco versato nel calcolo delle probabilità) avrà difficoltà nella determinazione del secondo fattore di questo prodotto, e cioè della *verosimiglianza* delle varie possibili composizioni per B. Si tratta infatti qui di rispondere in primo luogo alla domanda: qual è la probabilità di estrarre un biglietto bianco da un'urna che racchiude un biglietto bianco e uno nero (dopo aver ben mescolato)? La maggior parte di voi risponderà 1/2 per cui porremo:

$$\mathrm{Prob}(B \mid [1,1]) = 1/2.$$

Le altre due domande riguardano la probabilità di estrarre un biglietto bianco rispettivamente da un'urna che ne racchiude due bianchi e da un'urna che ne racchiude due neri. Le risposte suonano ancora più ovvie: 1 e 0! Porremo allora:

$$\mathrm{Prob}(B \mid [2,0]) = 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{Prob}(B \mid [0,2]) = 0.$$

Non altrettanto si può dire del primo fattore, e cioè di Prob([p,q]), la probabilità a priori delle varie composizioni dell'urna.

Nelle circostanze del suo problema Laplace risolveva la difficoltà relativa alla determinazione delle probabilità a priori applicando il così detto *principio di indifferenza*: dati più eventi, quando nulla ci porta a credere che uno debba accadere a preferenza degli altri, dobbiamo assegnare ad essi la stessa probabilità.[9] Laplace poneva dunque:

$$\mathrm{Prob}([2,0]) = \mathrm{Prob}([1,1]) = \mathrm{Prob}([0,2]) = 1/3.$$

[9] Ma Laplace non fu mai dogmatico intorno al principio. Anzi, esso non figura esplicitamente tra i «principi generali del calcolo delle probabilità» che Laplace elenca nel suo *Saggio filosofico sulle probabilità* (trad. it. in *Opere*, cit., pp. 249-257). Laplace è ben consapevole che la determinazione di quali siano – in ogni dato problema di inferenza statistica – i casi ugualmente probabili «è uno dei punti più delicati dell'intera teoria delle probabilità». (*Ibidem*, p. 249.) Per una discussione di carattere storico, si vedano i capp. IV e VII del *Treatise on Probability* di J.M. Keynes (1921).

3. *Il calcolo delle probabilità come calcolo delle frequenze relative*

John Venn fu certamente il più esplicito nella sua *The logic of chance* (1866, circa quarant'anni dopo la morte di Laplace) nel trattare tale difficoltà *di fatto* come una insuperabile difficoltà *di principio* per il programma di Pascal-Laplace. La differenza tra i due fattori, verosimiglianza e probabilità a priori, sarebbe consistita nel fatto che solo la prima ammette un'interpretazione *empirica* in termini di *frequenza relativa a lungo andare in una successione di esperimenti casuali*.[10] Infatti, secondo Venn, il significato di Prob(B|[p,q]) = r è che in una lunga successione di estrazioni casuali da un'urna di composizione [p,q] la frequenza relativa delle estrazioni di un biglietto bianco è all'incirca pari a r. Dato che un analogo significato non poteva essere assegnato a Prob([p,q]),[11] questo fattore non aveva per Venn alcun significato. Si spezzava così il fecondo nesso tra calcolo delle probabilità e logica dell'incerto e cominciava la riduzione del calcolo delle probabilità a un calcolo delle frequenze relative (o peggio dei limiti delle frequenze relative) in successioni (infinite) di esperimenti casuali. Naturalmente, non si deve credere che questa impostazione fosse perseguita in modo completamente coerente o non avesse oppositori. Fino almeno al 1910, la maggior parte dei suoi rappresentanti non respinsero in modo esplicito il programma di Pascal-Laplace, non foss'altro per la mancanza di un programma di ricerca alternativo altrettanto generale. Tipica a questo proposito è la posizione del più influente statistico britannico della seconda metà dell'800: Karl Pearson. Per Pearson, la probabilità «vera» è quella «oggettiva» di Venn; quella «soggettiva» di Pascal-Laplace è solo un surrogato.

[10] Una critica definitiva di questa definizione si trova proprio nel saggio *Probabilismo* pubblicato in questo volume, in particolare pp. 20-31.

[11] A meno di non immaginare che l'urna davanti a voi sia stata a sua volta estratta a caso da una superurna di composizione nota, che racchiude ad esempio tre urne rispettivamente di composizione [2,0], [1,1] e [0,2]!

Se si chiede la relazione tra probabilità soggettiva e oggettiva, credo si possa dire senza timore di smentite che pur differendo spesso di molto, tuttavia maggiore è l'esperienza di un uomo, più complete le sue osservazioni e la sua conoscenza dei fenomeni, più le sue probabilità soggettive approssimeranno quelle oggettive. Forse, non coincideranno mai, ma a lungo andare i suoi errori saranno pochi e tenderanno a compensarsi.[12]

Però,

è su esperimenti di questo tipo [casuali], su misurazioni statistiche accurate, e non su ragionamenti *a priori* o sull'opinione soggettiva, che i dati della probabilità devono essere basati.[13]

Solo a partire dagli anni '20 di questo secolo, prima Ronald Fisher e quindi Egon Pearson e Jerzy Neyman tentarono (lungo linee diverse) di costruire una logica dell'incerto che evitasse *sistematicamente* l'uso di probabilità a priori e fosse basata su un'interpretazione *esclusivamente* frequentista della probabilità. Questi tentativi furono indubbiamente assai ingegnosi e diedero luogo alla soluzione di una notevole varietà di nuovi e importanti problemi di inferenza statistica.[14]

4. *Entra de Finetti*

Proprio mentre Fisher, E. Pearson e Neyman stavano facendo eroici sforzi per racchiudere la logica dell'incerto nel letto di procuste della concezione frequentista, nel 1927, esattamente cent'anni dopo la morte di Laplace, prende avvio la terza fase della nostra storia.[15] Abbiamo preso il 1927 come suo punto di partenza perché è l'anno in cui si laurea il maggiore protagonista della rivoluzione scientifica che la caratterizza: Bruno de Finetti (1906-1985). È proprio negli anni a cavallo della laurea (tra il 1926 e il 1928) che egli intravvede i fondamentali risultati che gli consentiranno di riformulare la concezione soggettivistica della probabilità di Pascal e Laplace in modo tale da restituirle completa rispettabilità scientifica mettendola al riparo dalle tradizionali (e purtroppo ricorrenti) obiezioni frequentiste (o più generalmente «oggettiviste»).[16]

Ho raccolto in questo volume i testi salienti di questa rivoluzione scientifica.[17] Del primo, *Probabilismo*, troviamo scritto in una nota autobiografica di de Finetti:

[12] K. Pearson, *The laws of chance, in relation to thought and conduct*, 1892, ristampato in «Biometrika», 32, 1941, p. 95. Citazione in D.A. MacKenzie, *Statistics in Britain*, Edimburgh University Press, 1981, p. 203.

[13] *Ibidem*, p. 100.

[14] Come ha affermato Lindley, citato da de Finetti [1970], vol. 2, p. 621: «la più parte della moderna statistica [intende: oggettivistica, n.d.trad.] è perfettamente sana in pratica; essa è però basata su ragioni errate. Ma l'intuizione ha salvato lo statistico dagli errori. La mia tesi è che il metodo bayesiano giustifica ciò che egli ha sempre fatto [reinterpretandolo e correggendolo, agg.d.trad.] e che sviluppa nuovi metodi che mancano nell'approccio ortodosso». Giustamente, de Finetti aggiunge «correggendolo»; per un esame tecnico di alcuni degli errori da correggere, si veda E.T. Jaynes, *Confidence intervals vs. bayesian intervals*, ora ristampato in R.D. Rosenkrantz, a cura di, *E.T. Jaynes: papers on probability, statistics and statistical physics*, Reidel, Dordrecht, 1983, pp. 149-209.

[15] Per una storia di questa seconda fase fino al 1900 (dal 1820), si veda T.M. Porter, *The rise of statistical thinking*, Princeton University Press, Princeton, 1986. Un taglio più filosofico su questo stesso periodo ha P. Dessì, *L'ordine e il caso*, Il Mulino, Bologna, 1989. Parecchi saggi su questo periodo sono compresi nei due volumi degli *Studies in the history of statistics and probability*, Griffin, Londra, il primo già citato e il secondo (1977) curato da M. Kendall e R.L. Plackett, e nei due volumi dal titolo *The probabilistic revolution*, Bradford Books, MIT Press, Cambridge, Mass., 1986 (di autori vari). Benché di vari autori (L. Daston, L. Krüger, G. Gigerenzer, T. Porter), ha un carattere sistematico il recentissimo *The empire of chance*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989. Per quanto riguarda l'approccio di Neyman-Pearson, si legga ad esempio la storia raccontata dallo stesso Pearson: *The Neyman-Pearson story: 1926-1934*, ora in Pearson e Kendall, *cit.*, pp. 455-478.

[16] Questa ricostruzione in tre fasi della storia del calcolo delle probabilità sviluppa lo schizzo che ne fa de Finetti in [1959*c*] nel par. 2. Egli infatti caratterizza la terza fase come quella in cui «si è dovuto faticosamente riconquistare due secoli dopo [...] quel traguardo» che era stato raggiunto «fin dagli inizi» per concludere: «Terza fase: graduale affioramento delle insufficienze di tali tentativi [degli statistici oggettisti nel corso della seconda fase]; revisione del giudizio sulle teorie bayesiana e bernoulliana con la separazione degli elementi validi da quelli equivoci; *ritorno alla posizione di partenza opportunamente rettificata*» (pp. 13-14, c.vo nostro). Questa versione è ribadita anche in de Finetti [1960*c*], in particolare alle pp. 530-531. Una ricostruzione su linee analoghe è quella di E.T. Jaynes nel par. A di *Where do we stand on maximum entropy?* (1978), ora ristampato in Rosenkrantz, cit.

[17] Realizzando così finalmente un progetto studiato con lo stesso de Finetti nel 1979. Gli avevo proposto di curare un'antologia di suoi scritti per il Saggiatore (che comprendesse almeno *La previsione*). de Finetti mi rispose: «P.S. Riguardo alla iniziativa editoriale "Saggiatore", non mi sento di caricarmi d'impegni per scrivere (sono stanco e alquanto depresso); tuttavia, se posso essere utile con scambi di idee, o pareri su ciò che pensi di scrivere (preventivamente o posteriormente), sono a tua disposizione». (Lettera datata «Roma, 12 gennaio 1980».) Avevo conosciuto de Finetti nel 1972 in un Convegno su *Concezione soggettivistica della probabilità e logica induttiva* (i cui *Atti* sono stati pubblicati dalla CLUEB, Bologna, 1974, come Quaderno C.N.R. n. 3 di Filosofia della Scienza). Le nostre relazioni al Convegno dovevano essere contrapposte ma la convergenza fu invece quasi completa.

La prima illustrazione del proprio punto di vista [...] riguardo alla probabilità – punto di vista in radicale contrapposizione nei riguardi di tutte le svariate, imperversanti concezioni «oggettiviste» – si trova nel saggio (senza formule né formulazioni matematiche): *Probabilismo: saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza.*[18]

Il saggio comprende anche una critica definitiva della concezione «oggettivista» in tutte le sue varianti (particolarmente quelle frequentiste). *Probabilismo* è ristampato come primo capitolo di questo volume (per la prima volta dal 1931! Ma sta per uscire una sua traduzione in inglese in «Erkenntniss», 31, 1989). Del secondo, *La previsione*, si legge nella stessa nota:

La prima ampia esposizione in forma anche tecnica delle vedute di de Finetti è quella da lui presentata nel 1935 a Parigi, in una serie di cinque conferenze all'Institut Poincaré: *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives.*[19]

La previsione è il testo che più ha contribuito – soprattutto nella sua traduzione inglese – alla diffusione e al successo (vent'anni dopo però) della concezione di de Finetti. Esso è tradotto (in italiano per la prima volta dal 1937!) come secondo capitolo di questo volume. Con il terzo capitolo saltiamo all'epilogo della carriera accademica di de Finetti: esso è la ristampa dell'ultima lezione tenuta da de Finetti all'Università di Roma nel novembre 1976. Seguono una serie di interventi critici (compresi tra il 1936 e il 1951) in cui de Finetti fa brillantemente i conti con le altre concezioni della probabilità. Particolarmente interessanti quelli di critica alle concezioni (frequentiste) di von Mises e Reichenbach (rispettivamente capitoli IV e VII di questo volume) e di (parziale) consenso a quelle (soggettiviste) di H. Jeffreys e J.M. Keynes (capitolo V: *Probabilisti di Cambridge*).

[18] *Nota biografica*, in de Finetti [1981*b*], p. XXII.
[19] *Ibidem*, p. XXII.

5. *Il teorema della scommessa olandese*

Torniamo ora davanti alla nostra urna e supponiamo che non siate stati convinti dal principio di indifferenza di Laplace[20] e che quindi siate ancora in dubbio circa le probabilità a priori.

Il primo passo che dovete fare per risolvere questo dubbio consisterà nel liberarvi da «una delle credenze superstiziose più pericolose ed aberranti, quella che ammette e afferma che esistano delle "probabilità oggettive"»,[21] e cioè che la probabilità misuri qualche proprietà oggettiva che sta fuori di noi, nel mondo esterno. La probabilità va vista piuttosto come il «grado di fiducia di un dato soggetto, in un dato istante e con un dato insieme di informazioni, riguardo al verificarsi di un dato evento».[22] Dunque, come il *vostro* grado di fiducia – date le informazioni che avete intorno all'urna – circa la verità di ciascuna delle tre possibili ipotesi relative alla sua composizione. Ora, quanto meno, sapete dove guardare per risolvere il vostro dubbio: non fuori di voi, al mondo esterno, ma dentro di voi, al vostro grado di fiducia. La probabilità che voi attribuirete alle tre ipotesi deve semplicemente rappresentare al meglio la conoscenza parziale che voi avete della composizione dell'urna. Sfortunatamente, il lungo periodo di dominio (anche nell'istruzione) del dogmatismo oggettivista (per cui si danno solo i due estremi della conoscenza perfetta o dell'ignoranza) ci ha lasciati senza alcun addestramento a tradurre in numeri le nostre conoscenze parziali.[23] Così, la maggioranza di voi non riu-

[20] Per quanto mi riguarda, nelle particolari circostanze del problema di Laplace, adotterei una distribuzione uniforme (uguale probabilità alle tre alternative); essa è l'unica che conserva il carattere simmetrico (rispetto alle due composizioni estreme) dell'informazione che abbiamo a disposizione. Mi sembra perciò l'unica che rappresenti onestamente l'informazione che abbiamo a disposizione.
[21] de Finetti [1981*a*], p. 1164.
[22] de Finetti [1970*d*], vol. I, p. 6.
[23] de Finetti ha insistito molto sull'importanza di un addestramento alla stima delle grandezze (oggettive, come la lunghezza o il peso, o soggettive, come la probabilità) già nell'ambito della scuola. Si veda ad esempio questo volume a p. 176. In particolare, de Finetti [1965*b*] è un'analisi di grande interesse del problema degli esami in forma di test, analisi che è purtroppo stata ignorata dai nostri pedagogisti che si occupano di decimologia. Ma più in generale andrebbero riconsiderate tutte le sue proposte di riforma dell'insegnamento della matematica.

scirà ugualmente a scegliere tre numeri che possano rappresentare adeguatamente il proprio grado di fiducia rispetto alle verità delle tre ipotesi.

Dobbiamo fare allora un secondo passo, cercare cioè un metodo non introspettivo, *operativo* per misurare (= rappresentare mediante un numero) il vostro grado di fiducia.[24] A questo scopo metto a vostra disposizione una somma di denaro S (non troppo grande, diciamo pari a 100.000 lire),[25] che mi impegno a consegnarvi *a condizione che l'ipotesi che l'urna racchiuda due biglietti bianchi (e nessuno nero) sia quella vera.* (Naturalmente, se l'ipotesi risulta falsa, non vi darò nulla.) Vi chiedo ora qual è il prezzo massimo P che siete disposti ad offrirmi in cambio del contratto che vi ho proposto. Tenete conto però che quale che sia il prezzo P che voi fissate dovete essere disposti a scambiare con me le parti su mia richiesta, a pagare cioè voi a me la somma S se l'ipotesi in questione è quella vera contro il pagamento da parte mia a voi del prezzo P.

È allora naturale prendere P/S come misura del vostro grado

[24] Al metodo di misurazione basato sullo schema delle scommesse, che esponiamo in quanto segue e che troviamo già in de Finetti [1930*m*] e [1930*n*], e più estesamente in de Finetti [1931*g*], oltre che naturalmente in *La previsione* (in questo volume, pp. 77-80), de Finetti preferì a partire dall'inizio degli anni '60 quello basato sulle «regole di penalizzazione» cui lo stesso de Finetti fa riferimento indiretto nella nota *a* a p. 77 di questo volume e diretto alle pp. 173-177. Si vedano inoltre de Finetti [1962*b*], [1963*d*], [1965*b*] e [1965*c*]. Un'esposizione di questo metodo viene data anche da Lindley in *Making decisions*, Wiley, 1985 (II edizione), di prossima pubblicazione presso il Saggiatore. Ma già nel 1935, in *La previsione*, al metodo basato sullo schema delle scommesse de Finetti preferiva un terzo metodo basato su un'assiomatizzazione puramente qualitativa della probabilità poiché aveva «il vantaggio di consentire un'analisi più profonda, in quanto parte da nozioni puramente qualitative e così non introduce la nozione di "denaro" che è del tutto estranea al calcolo delle probabilità ma che è necessaria perché si possa parlare di poste». (Questo volume, p. 76.) Questo metodo è illustrato, oltre che ne *La previsione* (questo volume, pp. 74-76), nel saggio su Polya alle pp. 249-260 di questo volume e in de Finetti [1931g]. Una rassegna completa di questi metodi, e altri ancora, di misurazione della probabilità soggettiva si trova ad esempio in Krantz-Luce-Suppes-Tversky, *Foundations of measurement*, vol. I, Academic Press, 1971. Ho usato lo schema delle scommesse perché è il più chiaro come prima approssimazione (come dice de Finetti: «una volta si sia mostrato come superare ogni sospetto verso la natura troppo concreta e per certi versi artificiale di una definizione basata sulla scommessa, questo secondo procedimento è preferibile per la sua chiarezza», questo volume, p. 76).

[25] Per questa qualificazione, si veda la nota *a* a p. 77 di questo volume.

di fiducia nella verità dell'ipotesi in questione. (È chiaro che maggiore è il grado di fiducia che avete nella verità dell'ipotesi [2,0], più alto sarà il prezzo massimo P a cui valuterete la mia offerta di 100.000 lire condizionate alla verità dell'ipotesi in questione.) Supponete ora che, dopo adeguata riflessione, abbiate fissato i prezzi P, Q e R rispettivamente per l'ipotesi [2,0], [1,1] e [0,2] per cui i tre numeri: P/S, Q/S e R/S, rappresenteranno il vostro grado di fiducia nella verità delle tre ipotesi.

Avevamo iniziato (par. V) affermando che le probabilità andavano interpretate come gradi di fiducia. Ora che abbiamo determinato i vostri gradi di fiducia, possiamo tornare alle probabilità. Sapete però che le probabilità si combinano tra loro secondo regole ben definite, quelle appunto stabilite dal calcolo delle probabilità.[26] Ad esempio, per poter interpretare come probabilità i tre quozienti precedentemente trovati, e cioè P/S, Q/S e R/S, dovrebbe valere (per il teorema delle probabilità totali) tra di essi la seguente relazione:

$$P/S + Q/S + R/S = 1$$

Naturalmente, sarà solo un accidente fortunato se i prezzi che voi avete fissato soddisfano questa condizione.[27] Ma se

[26] Le regole del calcolo delle probabilità possono essere dedotte tutte da due sole regole fondamentali:

(1) la probabilità di un evento certo è pari a 1
(2) la probabilità che si verifichi almeno uno tra due eventi incompatibili è pari alla somma delle probabilità di questi eventi.

Un'esposizione (non facile) di queste regole si trova nella *Teoria delle probabilità* di de Finetti. Non meno difficile ma più breve è lo splendido de Finetti [1938g] purtroppo difficilmente reperibile. Come esposizione introduttiva (tra quelle disponibili in italiano) ho sempre trovato eccellente quella di Kemeny-Snell-Thompson nel I volume del loro *Matematica ed attività umane*, Feltrinelli, Milano, 1968.

[27] Dunque, benché de Finetti abbia insistito che l'interpretazione della probabilità come grado di fiducia è la più vicina a quella dell'«uomo della strada», è chiaro che l'interpretazione soggettivista del calcolo delle probabilità non pretende di trasformarlo in una teoria empirica che descrive come l'uomo della strada davvero ragiona in condizioni di incertezza. Proprio perché, forse, alcune sue formulazioni sembravano implicare questa pretesa, de Finetti ha aggiunto la nota *e* a p. 88 di *La previsione*. Tuttavia, già in *Probabilismo* (parr. 24 e 25) de Finetti era stato abbastanza chiaro: «nel calcolo delle probabilità *sostituisco* al mio stato d'animo vago e inafferrabile quel-

non la soddisfano, i vostri gradi di fiducia non potranno essere interpretati come delle probabilità. Il primo fondamentale risultato dimostrato da de Finetti, noto come teorema della scommessa olandese,[28] mostra perché è *irrazionale* fissare i prezzi in modo tale che i risultanti gradi di fiducia non soddisfino le regole del calcolo delle probabilità. Esso stabilisce infatti che:

> Se i gradi di fiducia assegnati a una classe di eventi (o ipotesi, come vi pare) sono *coerenti*, allora tali gradi di fiducia *debbono* essere delle probabilità, e cioè combinarsi secondo le regole del calcolo delle probabilità.

Che cosa si intende per coerenza di un insieme di gradi di fiducia? Significa che il soggetto di cui essi sono i gradi di fiducia è immune da scommesse olandesi, e cioè da combinazioni di scommesse tali che, qualunque sia l'ipotesi vera (qualunque evento si realizzi), egli è *certo* di perdere. Questo significa nel caso in esame che se voi arrivate a tre numeri che *non* sommano a 1, è possibile scommettere con voi in modo che, qualunque delle tre ipotesi sia vera, perdiate con certezza. Così, chiunque voglia evitare perdite certe *deve* fissare i propri gradi di fiducia in modo che si combinino secondo le regole

lo di un individuo *fittizio* che non conoscesse incertezze nel giudicare le gradazioni della propria fiducia» (p. 51, c.vi nostri). Così, la vasta evidenza sperimentale raccolta ad esempio in Kahneman-Slovic-Tversky, a cura di, *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982, che stabilirebbe sistematiche violazioni delle regole del calcolo delle probabilità nei ragionamenti ordinari in condizioni di incertezza, è semplicemente irrilevante per la valutazione della correttezza della concezione soggettivista. Diverso è il problema posto da questa evidenza agli economisti che hanno incorporato nei loro modelli esplicativi l'ipotesi della coerenza (nel senso di de Finetti) dei soggetti coinvolti. Su questo punto si veda M.J. Machina, *Choice under uncertainty: problems solved and unsolved*, «Economic perspectives», 1, 1987, pp. 121-154.

[28] Traduce il termine inglese «dutch book theorem»; nessuno ha mai capito (compreso de Finetti, vedi p. 173 di questo volume) perché in inglese si faccia riferimento agli olandesi per denotare scommesse che implicano perdite certe. Il teorema compare per la prima volta in de Finetti [1930*l*] ed è dimostrato in forma rigorosa per la prima volta in de Finetti [1931g]. Per quanto riguarda questo volume, si vedano in particolare le pp. 77-80.

del calcolo delle probabilità.[29] (de Finetti ha anche dimostrato che vale il converso, e cioè che se i vostri gradi di fiducia sono delle probabilità, allora siete immuni da scommesse olandesi.) Dunque, la conclusione è che per un soggetto coerente il calcolo delle probabilità è l'unica logica dell'incerto possibile. L'intuizione di Pascal è diventata un teorema: o si ragiona intorno agli eventi incerti secondo le regole del calcolo delle probabilità o si è incoerenti. Questa è una eccellente giustificazione di questo calcolo come logica dell'incerto, giustificazione che – evidentemente – non fa nessun ricorso alla nozione di frequenza.[30]

6. *Il teorema di rappresentazione*

Vi sento un po' preoccupati. Va bene, direte, de Finetti ha dimostrato che per ciascuno di noi debbono esserci dei numeri che rappresentano le probabilità a priori delle tre ipotesi (almeno se siamo coerenti) e che questi numeri sono del tutto in-

[29] Questo significa che *qualunque* tripla di numeri che sommi a 1 potrà essere scelta a rappresentare i propri gradi di fiducia. Questo *non* significa invece – come qualcuno continua a credere (ad esempio, T. Seidenfeld in *Why I am not an objective bayesian*, «Theory and decision», 11, 1979, in particolare p. 416) – che tutte siano ugualmente *ragionevoli*. In *Probabilismo*, p. 12, de Finetti spiega bene il contrasto: «In questo esempio abbiamo considerato uno stato d'animo – quello del cabalista – che ci appare ridicolo. Non esitiamo a dargli del pazzo e dire che chiunque attribuisca valori diversi alle probabilità dei diversi numeri [del lotto] manca di buon senso. *Io sono pienamente d'accordo*, ma non pretendo che questo mio stato d'animo, per quanto profondamente radicato al mio istinto e per quanto universalmente condiviso, abbia alcun significato recondito, alcun valore positivo». (c.vo nostro)

[30] Vi sono almeno altre due giustificazioni di questa tesi del tutto indipendenti dal teorema della scommessa olandese. La prima è basata sul teorema di Wald per cui si veda, oltre che il saggio che de Finetti dedica a Wald in questo volume (pp. 261-270), ad esempio de Finetti [1963*d*]; la seconda, che però – per quanto ne so – de Finetti non cita mai, è basata sul teorema di Cox (si veda R.T. Cox, *The algebra of probable inference*, The John Hopkins Press, Baltimora, 1961 – ma il teorema era stato pubblicato originariamente in un suo articolo del 1946 sull'«American Journal of Physics», 17, pp. 1-13, dal titolo *Probability, frequency, and reasonable expectation*). Un'esposizione semplificata del teorema si trova in E.T. Jaynes, *How does the brain do plausible reasoning?*, in G.J. Erickson e C.R. Smith, a cura di, *Maximum entropy and bayesian methods in science and engineering* (vol. I, Reidel, Dordrecht, 1988, pp. 1-29). Potrebbe il silenzio di de Finetti essere spiegato con il fatto che Savage non aveva particolarmente apprezzato questa giustificazione? (Si veda la recensione di Savage a Cox nel «Journal of the American Statistical Association», 57, 1962, pp. 921-922.)

dipendenti da frequenze (limiti di frequenze). Ma non è possibile spezzare ogni legame tra probabilità e frequenza.

Dopo tutto, ciascuno di noi *sente* crescere il proprio grado di fiducia nel verificarsi di un evento futuro al crescere del numero di eventi ad esso «analoghi» che si sono verificati in passato; più in generale, è semplicemente un fatto che tendiamo a valutare la probabilità di un evento futuro molto vicina alla frequenza relativa degli eventi passati ad esso «analoghi».[31]

Supponiamo ad esempio di continuare le estrazioni dalla nostra solita urna (sempre senza conoscere la composizione) *reimbussolando* ogni volta il biglietto estratto e *rimescolando*. Supponiamo ancora di aver fatto un gran numero di estrazioni (diciamo n) e di aver sempre estratto un biglietto bianco cosicché la frequenza relativa dei biglietti bianchi estratti è pari 1 (e cioè n su n estratti sono bianchi). Non dovrebbe la probabilità che il prossimo ((n + 1)-esimo) biglietto estratto sia bianco essere molto vicina a 1? Tranquilli, è proprio così anche nell'ambito della concezione soggettivistica della probabilità. Lo garantisce (sotto una opportuna condizione – detta di *scambiabilità* – soddisfatta nel tipo di situazioni abitualmente considerate dagli statistici frequentisti) il secondo fondamentale risultato di de Finetti, noto come teorema di rappresentazione di de Finetti.[32] Ci limitiamo a darne qui una conseguenza relativa al problema in discussione per renderne più concreto il significato. Indichiamo con B_i l'evento che nella i-esima estrazione è stato estratto un biglietto bianco e con B(n) l'evento che nelle prime n estrazioni sono stati sempre estratti biglietti bianchi. Allora tale problema implica la seguente proposizione:

> Se le estrazioni dall'urna sono per un dato soggetto eventi *scambiabili*, il grado di fiducia che egli ha nel verificarsi dell'evento B_{n+1} (biglietto bianco estratto all'(n + 1)-esima estrazione) subordinatamente all'evento B(n) (quando cioè siano stati estratti n biglietti bianchi nelle precedenti n estrazioni), tende a 1 al tendere di n all'infinito, tende cioè alla frequenza relativa osservata delle estrazioni di biglietti bianchi, eccetto nel caso in cui egli abbia assegnato probabilità a priori zero all'ipotesi [2,0].

Che cosa significa che gli eventi di una data classe sono *scambiabili* per un dato soggetto? Supponete di considerare varie estrazioni dalla nostra urna, dove B significa «estrazione di un biglietto bianco» e N «estrazione di biglietto nero». Così, la successione: BNNNBN, è l'evento E che il primo estratto è bianco, i tre successivi neri, il quinto bianco e il sesto nero. Considerate ora una qualunque successione che risulta dalla precedente cambiando l'*ordine* di B e N, ad esempio: BNBBBN. Essa è l'evento E′ che il primo estratto è bianco, il secondo nero, i tre successivi bianchi e il sesto nero. Chiamiamo B un successo e N un insuccesso. Consideriamo ora la classe di tutte le possibili successioni di questo tipo. Se considerate equiprobabili tutte le successioni che differiscono – al modo di E e E′ – solo per l'ordine dei successi e degli insuccessi, allora per voi gli eventi di quella classe sono scambiabili.

Naturalmente, la maggior parte di voi da un lato considera scambiabili gli eventi della classe considerata, considera cioè la probabilità di estrarre r biglietti bianchi e s biglietti neri come completamente determinata soltanto da r e da s e non anche dall'ordine in cui si sono succedute le estrazioni di biglietti bianchi e neri e dall'altro non ha assegnato probabilità a priori zero alla composizione [2,0]. (Si noti che se invece di trattarsi

[31] Così imposta il problema lo stesso de Finetti. Si veda questo volume, p. 98. È parte essenziale della soluzione di de Finetti il chiarimento del senso dell'espressione «eventi analoghi». In questo volume si vedano ad esempio le pp. 20-21, 42, 77, 94-95, 100, 162-163, 228.

[32] La prima dimostrazione è in de Finetti [1928*c*] sviluppata poi in [1930*n*]. Ad esso sono dedicati in questo volume i parr. 3 e 4 di *La previsione*. Esso è illustrato brevemente anche in *Probabilismo*, pp. 44-48 (par. 22). Un'esposizione si trova nel lemma *Induzione statistica* che ho scritto per l'Enciclopedia Einaudi, vol. VII, Torino, 1979, pp. 384-430. Ampio materiale (applicazioni ed estensioni del teorema) si trova ad esempio nei due volumi *Studies in inductive logic and probability*, il primo curato da R. Carnap e R. Jeffrey nel 1971 (University of California Press) e il secondo dal solo Jeffrey nel 1980 (stesso editore) e nel volume curato da Koch e Spizzichino, *Exchangeability in probability and statistics*, North-Holland, Amsterdam, 1982 (che contiene tra l'altro una spiegazione chiara del teorema e delle sue anticipazioni storiche nel saggio di Fürst, *de Finetti: a scientist, a man*, pp. 7-19). Interessante anche il saggio di E.T. Jaynes, *Some applications and extensions of the de Finetti representation theorem*, in P. Goel e A. Zellner, a cura di, *Bayesian inference and decision techniques*, North-Holland, 1986.

di estrazioni casuali da un'urna, si trattasse di centri di un tiratore a un bersaglio, difficilmente considerereste le successioni di successi, centro colpito e di insuccessi, centro mancato, scambiabili.) Si applica allora la conseguenza sopra citata del teorema di de Finetti per cui $\mathrm{Prob}(B_{n+1} | B(n))$ tenderà a 1, sarà cioè sempre più prossima alla frequenza relativa osservata, al crescere di n, *quali che siano le probabilità a priori che avete assegnato alle tre ipotesi*.

Come è naturale aspettarsi, a parità di n, questa prossimità sarà tanto maggiore quanto maggiore è la probabilità a priori che avete assegnato a [2,0].

Ma – si chiederanno ancora i più scettici tra voi – questa felice situazione non dipenderà per caso dal carattere artificialmente semplice del problema di Laplace per poi non ripresentarsi più in problemi scientifici reali, di biologia, fisica, ingegneria?[33] È vero il contrario: il problema di Laplace rappresenta in un certo senso la situazione più difficile possibile (naturalmente da un punto di vista concettuale, certo non matematicamente). Infatti, in molti problemi scientifici reali le informazioni iniziali pongono vincoli tali sulle probabilità a priori da ridurre fortemente le possibili differenze di valutazione tra ricercatori diversi.[34] Così, i risultati ottenuti nel problema di Laplace sono largamente rappresentativi e mostrano che anche in quei problemi in cui diversi ricercatori possono dare differenti valutazioni delle probabilità a priori (*ciascuno a suo modo*, come amava ripetere de Finetti), vi sarà una convergenza tra le loro valutazioni dopo un numero di esperimenti che dovrà naturalmente essere tanto maggiore quanto maggiore è la differenza iniziale (naturalmente, se le condizioni del teorema di de Finetti sono soddisfatte, come normalmente accade nella maggior parte dei problemi scientifici reali). Inoltre, il valore

[33] Incidentalmente, già nella memoria del 1774 Laplace dava una applicazione alla fisica dei risultati ottenuti per risolvere il nostro problema. Si vedano *Opere*, cit., par. V.

[34] Come ha ripetutamente sottolineato E.T. Jaynes.

comune cui convergono sarà precisamente la frequenza relativa degli eventi del tipo considerato nella successione di esperimenti realizzati.

7. *Conclusione*

Così, non solo la concezione soggettivista della probabilità non spezza i legami tra probabilità e frequenza ma rende esplicite, via la condizione di scambiabilità, le condizioni in cui tali legami devono sussistere e la forma esatta che essi devono assumere.[35] Era così formulato il nucleo del programma di ricerca scientifico oggi noto come *statistica bayesiana*.[36] Ci vollero però vent'anni perché qualcuno si accorgesse di questo, vent'anni in cui la concezione frequentista dominò la statistica praticamente senza rivali. Solo nel 1954 con la pubblicazione di *The Foundations of Statistics* di Leonard Savage, grande amico di Bruno de Finetti, comincia il declino della concezione frequentista e l'ascesa di quella soggettivista, ascesa che non solo gli ha consentito di riottenere al suo interno tutti i risultati validi già ottenuti dalla concezione frequentista ma di ottenere anche molti importanti risultati nuovi. Così, la concezio-

[35] Altri legami tra probabilità e frequenza sono stabiliti nel paragrafo 2 di *La previsione*.

[36] Per un panorama con ampia bibliografia fino al 1962, si veda L.J. Savage, *Bayesian statistics*, in E. Machol e P. Gray, a cura di, *Recent developments in information and decision processes*, MacMillan, New York, 1962; D.E. Lindley prosegue questo panorama fino al 1971 in «Bayesian statistics, a review», SIAM, Filadelfia, 1971. Dopo il 1970 la produzione è aumentata a un ritmo tale che difficilmente se ne potrebbero oggi tracciare panorami del tipo di quelli citati. Una fonte importante di informazione sono gli *Atti* degli Incontri Internazionali degli statistici bayesiani che si svolgono a Valencia ogni quattro anni (dell'ultimo, 1987, gli *Atti* sono stati pubblicati dalla Clarendon Press, Oxford, con il titolo *Bayesian Statistics*, 3). Una introduzione di carattere concettuale ai metodi bayesiani si trova in E.T. Jaynes, *Bayesian methods: general background*, in J.H. Justice, a cura di, *Maximum entropy and bayesian methods in applied statistics*, Cambridge University Press, 1986. Uno schizzo di questi metodi si trova nel II volume della *Teoria* di de Finetti, pp. 559-626. Un ottimo manuale introduttivo a questi metodi è quello di L. Daboni e A. Wedlin, *Statistica. Un'introduzione all'impostazione neo-bayesiana*, UTET, Torino, 1982. (Naturalmente ve ne sono molti eccellenti in lingua inglese; tra questi vi è certamente quello di Morris De-Groot, *Probability and statistics*, Addison-Wesley, Reading Mass., 1975.)

ne soggettivista ha superato quella frequentista sia sul piano della giustificazione concettuale sia su quello della capacità di risolvere problemi scientifici reali.[37]

Imre Lakatos scriveva nella sua *Metodologia dei programmi di ricerca scientifici* che «una scuola di brillanti studiosi (appoggiata da una società ricca che finanzi pochi esperimenti ben pianificati) potrebbe riuscire a mandare avanti qualsiasi programma fantastico o, altrimenti, se lo desidera, a rovesciare qualsiasi pilastro di "conoscenza stabilità" scelto ad arbitrio».[38] È un tributo al genio di de Finetti l'essere riuscito in questa impresa di trasformare un'idea filosofica pazzesca nel nucleo di un programma di ricerca scientifico tra i più progressivi del '900 che ha ormai completamente rovesciato quel pilastro di «conoscenza stabilità» che era la credenza superstiziosa nella probabilità oggettiva.

[37] Gli articoli di Jaynes raccolti in Rosenkrantz, cit., costituiscono un'ampia evidenza al proposito che può essere utilmente integrata dal materiale raccolto nei tre volumi curati da Erickson e Ray Smith, cit., e nel volume *Maximum entropy and baysian methods in inverse problems* curato per la Reidel (1985) da Ray Smith e W.T. Grandy Jr. I risultati qui riportati riguardano soprattutto problemi di fisica e ingegneria. Ma risultati interessanti sono stati ottenuti anche in econometria (è ormai del 1971 *An introduction to bayesian inference in econometrics* di A. Zellner pubblicato da Wiley, New York) e – più recentemente – in teoria dei giochi per cui si veda *A general theory of equilibrium selection in games*, MIT, Cambridge Mass., 1988, di John Harsanyi e Reinhard Selten.

[38] Imre Lakatos, *La metodologia dei programmi di ricerca scientifici*, vol. I, il Saggiatore, Milano, 1985, p. 128. (Si trova in questa pagina anche la citazione che fa da epigrafe a questa prefazione.)

Avvertenza del curatore

I testi dei saggi di de Finetti che compaiono in questo volume sono stati ristampati riducendo al minimo gli interventi. (Naturalmente, sono stati corretti gli errori di stampa. In particolare, per quanto riguarda *La previsione*, si è utilizzato l'*Errata Corrige* compilato dallo stesso de Finetti e pubblicato a p. XVII di de Finetti [1972*f*].) Ad esempio, ne *La previsione*, de Finetti cita la traduzione tedesca del volume di P. Bridgman, *The logic of modern physics*, New York, 1927 e non l'originale inglese (di cui evidentemente non disponeva). Il traduttore inglese ha cambiato il riferimento con la citazione dell'edizione originiale; noi abbiamo ripristinato il riferimento alla traduzione tedesca. (Incidentalmente, è oggi disponibile una traduzione italiana di questo volume, come pure di altri classici citati da de Finetti: Mach, Poincaré, ecc.) Non abbiamo toccato nemmeno la numerazione della bibliografia degli scritti di de Finetti riportata alla fine de *La previsione* (pp. 146-147 di questo volume). Essa non parte da [1] e non è consecutiva probabilmente perché de Finetti l'ha tratta da una propria bibliografia più estesa (redatta per altre ragioni) semplicemente cancellando le voci non pertinenti. Invece, in conformità con la traduzione inglese, nella nota 33 a p. 132 di questo volume, abbiamo integrato il testo originale francese in cui si parla semplicemente di «catene» con «catene di Markov».

Infine, segnaliamo che l'articolo congiunto con Savage cui de Finetti fa riferimento come di prossima pubblicazione nella nota *a* di p. 77, non è mai uscito. In una nota aggiunta alla traduzione inglese di de Finetti [1972*f*], de Finetti dice: «l'articolo congiunto apparirà tra breve a nome di L.J. Savage soltanto». Vedi de Finetti [1972*f*], nota a p. 5. L'articolo di Savage uscì nel 1974 con il titolo di *Elicitation of personal probabilities and expectations*, in S.E. Fienberg e E.A. Zellner, a cura di, *Studies in bayesian econometrics and statistics*, North-Holland, Amsterdam, pp. 111-156.

Per quanto riguarda più propriamente la traduzione del testo francese di *La previsione*, d'accordo con la traduttrice, abbiamo accettato la maggior parte delle scelte del traduttore inglese, Henry E. Kyburgh jr., scelte che erano state avallate dallo stesso de Finetti. (Si veda al proposito la *Nota del traduttore* alla traduzione inglese di *La previsione*, in *Studies in subjective probability*, Wiley, New York, 1964, curata dallo stesso Kyburgh e da H. Smokler, pp. 95-96.) Elenchiamo tali scelte brevemente. «Equivalent» è stato reso con «scambiabile» (si vedano al proposito le osservazioni dello stesso de Finetti a p. 150 di questo volume). «Subjectif», che nel testo francese veniva usato soprattutto nel senso di soggettivista, è stato reso, in questi contesti, con «soggettivista». (Ma si noti che de Finetti usa questo termine in modo ambiguo spesso anche in italiano.) «Loi» è usato nel testo francese anche in contesti in cui si usa attualmente il termine «distribuzione» (come ad esempio in «lois de probabilités», a p. 12 del testo francese oppure in «loi-limite», a p. 31). In questi contesti lo abbiamo tradotto con «distribuzione». Inoltre, abbiamo tradotto con «funzione di distribuzione» l'espressione francese «fonction de repartition» (che ricorre solo nel par. 4), anche se de Finetti usa spesso il termine «funzione di ripartizione». Il punto più significativo in cui ci siamo distaccati dalle scelte di Kyburgh è sul termine «nombre aléatoire» che abbiamo tradotto letteralmente con «numero aleatorio» (questo è il termine che de Finetti ha sempre usato in italiano).

Abbiamo seguito l'edizione inglese di *La prévision* sia nel modificare la notazione per gli eventi subordinati che quella per la somma logica di eventi. L'evento subordinato, E dato A, indicato nel testo francese da:

$$\frac{E}{A},$$

è qui indicato da $E|A$ (per ovvie ragioni tipografiche e perché è questa ormai la pratica corrente). La somma logica degli eventi E e E′ indicata nel testo francese da «E + E′» è qui indicata da «EvE′», come è ormai pratica corrente per evitare confusioni con la somma aritmetica. Invece, per ragioni di leggibilità, non abbiamo adottato l'abbreviazione usata da de Finetti della notazione per la negazione di un evento E. Abbiamo così sempre usato la notazione «ufficiale»: ~E.

La bibliografia riportata alle p. 271-288 riproduce essenzialmente quella curata da Luciano Daboni in appendice al suo *Bruno de Finetti. Necrologio*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», 7, 1A, 1987, pp. 283-308. Un'altra bibliografia completa è quella curata da Massimo De Felice per il volume di de Finetti, *Scritti (1926-1930)*, CEDAM, Padova, 1981, pp. 369-388, bibliografia che è basata su quella compresa nella *Raccolta degli Scritti di Bruno de Finetti*, 10 volumi + 1, ed. fotostatica, a cura della Biblioteca dell'I.N.A., Roma, 1979, pp. 8-49, (reperibile presso il Dipartimento di matematica applicata alle scienze economiche, statistiche ed attuariali, dell'Università di Trieste e presso il Dipartimento di scienze attuariali e matematica per le decisioni economiche e finanziarie, dell'Università «La Sapienza» di Roma).

È alla bibliografia in questo volume che fanno riferimento le mie citazioni dei lavori di de Finetti. Si noti che i lavori di de Finetti sono elencati non nell'ordine della loro pubblicazione ma nell'ordine della loro prima comunicazione.

Segnaliamo inoltre che le notizie bibliografiche sono state prese dalle due brevi autobiografie esistenti di de Finetti. La prima è comparsa originariamente nella *Raccolta degli Scritti di Bruno de Finetti*, già citata, pp. 1-7 e riprodotta in *Scritti (1926-1930)*, pp. XV-XXIV, già citati. La seconda è comparsa con il titolo *Probability and my life*, in J. Gani, a cura di, *The making of statisticians*, Springer, New York, 1982, pp. 3-12. Profili molto belli al tempo stesso biografici e scientifici di de Finetti sono stati fatti da Luciano Daboni nel già citato *Necrologio* e inoltre in *Few reflections on the work of the master*, «Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali», 7, fascicoli 1-2, 1984, pp. 5-13, e da Dario Fürst in *De Finetti: a scientist, a man*, in G. Koch e F. Spizzichino, a cura di, *Exchangeability in Probability and Statistics*, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 7-20.

Segnaliamo infine, oltre al già citato Koch e Spizzichino, i due seguenti volumi di saggi in onore di de Finetti: a cura di P.K. Goel e A. Zellner, *Bayesian inference and decision techniques. Essays in honor of Bruno de Finetti*, North-Holland, Amsterdam, 1986 e a cura di R. Viertl, *Probability and bayesian Statistic*, Plenum Press, New York, 1987.

Desidero infine ringraziare Fulvia de Finetti, Dario Fürst e Simona Morini per la generosa collaborazione che mi hanno dato nel curare questo volume.

Questo lavoro è parte di una ricerca parzialmente finanziata da un contributo C.N.R. 88.01319.08 (comitato 08).