IL PROBLEMA DEI « PIENI » *)

B. DE FINETTI.

SUNTO. — Si esamina nei suoi diversi aspetti il problema del *rischio* derivante dalla copertura di un insieme di assicurazioni e, conseguentemente, il problema dei *pieni*, ossia del metodo più opportuno di cedere in riassicurazione una parte di tali assicurazioni per ridurre il rischio entro i limiti voluti colla minima perdita di guadagno. I diversi aspetti considerati sono: quello del rischio entro un singolo esercizio (Cap. I), del rischio per l'intero portafoglio esistente (Cap. II), del rischio relativo all'intero sviluppo futuro dell'impresa (Cap. III). Seguono (Cap. IV) delle considerazioni conclusive.

CAPITOLO PRIMO

IL PROBLEMA NELL'ÀMBITO DI UN ESERCIZIO.

1. *Impostazione.* — Il problema del rischio – e quello della determinazione dei pieni, che ne costituisce l'applicazione pratica – si può presentare e considerare sotto così vari aspetti e ha dato luogo

*) *Nota della Redazione.* – Abbiamo dato notizia, a suo tempo, nel fascicolo di Ottobre 1937–XV, del concorso bandito dal Comitato per la Fisica e la Matematica Applicata del Consiglio Nazionale delle Ricerche per un lavoro sul tema: *Sulla somma massima che una Azienda di Assicurazioni può assicurare a proprio rischio (pieno). Contributi al problema teorico con riferimenti alla pratica industriale, tenute presenti le possibilità della riassicurazione.*

Abbiamo pure pubblicato, nel fascicolo di Luglio–Ottobre 1939–XVII, l'esito del concorso del quale è risultato vincitore il prof. B. de Finetti.

Quale sede per la pubblicazione della memoria premiata abbiamo proposto questo « Giornale » e il Consiglio Nazionale delle Ricerche ha approvato. Il testo che pubblichiamo è quello presentato al detto concorso in data 31 dicembre 1938–XVII; parecchie note in calce (la necessità della cui aggiunta in caso di pubblicazione era espressamente rilevata nel testo inviato al Consiglio Nazionale delle Ricerche) sono invece posteriori (in particolare quelle ove occorrono riferimenti a lavori precedenti dell'Autore il quale doveva allora mantenersi incognito).

a tante disquisizioni, che appare quasi necessario un duplice cenno preventivo: una discussione preliminare sul modo in cui s'intende impostare il problema, e un cenno storico sui contributi e le opinioni dei diversi autori con relativa presa di posizione al riguardo. Ma sarebbe difficile e forse impossibile trattare ciò in modo non eccessivamente superficiale prima di aver chiarito concretamente il proprio punto di vista impostando e studiando il problema stesso; perciò entriamo subito in argomento, osservando soltanto che l'impostazione che diamo per ora al problema è molto ristretta, e sarà integrata in seguito. L'impostazione attuale avrà comunque il vantaggio di concentrare l'attenzione su vari lati della questione che conserveranno la loro importanza anche ponendosi da altri più adeguati punti di vista, e di evitare per il momento altri essenziali elementi del problema la cui considerazione simultanea renderebbe assai malagevole un primo orientamento.

Precisamente studieremo dapprima il problema relativo ad un unico esercizio, considerando un'impresa di assicurazione che disponga di un dato fondo di garanzia G ed abbia assunto un certo insieme di n assicurazioni, i cui guadagni aleatorî relativi al dato esercizio indicheremo con $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \cdots, \overline{X}_n$. Il guadagno totale sarà $\overline{X} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + + \cdots + \overline{X}_n$; esso potrà essere negativo e costituire quindi una perdita, ma interessa che in tal caso la perdita non superi G, altrimenti si avrebbe il fallimento della compagnia. Interessa quindi la probabilità della disuguaglianza $\overline{X} + G < 0$. Se la probabilità di tale disuguaglianza, ossia la probabilità di fallimento, non è talmente piccola da giudicarsi compatibile col grado di prudenza prefissoci, bisogna cercare di diminuirla ricorrendo alla riassicurazione, benchè ciò porti a rinunciare a una parte del guadagno. E sorge così il problema dei pieni, che consiste – nella sua accezione più generale che vogliamo qui considerare – nel determinare il modo e i limiti più vantaggiosi nella riassicurazione, e cioè tali da rendere massima – a parità della parte di guadagno che si perde – la diminuzione del rischio di fallimento.

Se non si pone alcuna restrizione alla forma in cui la riassicurazione può essere effettuata, si vede senz'altro che il modo più sicuro per eliminare il rischio di fallimento con la minima perdita di guadagno consiste nel far sopportare al riassicuratore, verso pagamento di un premio S, l'eventuale eccedenza della perdita sull'importo $G—S$; si tratta del procedimento detto della « riassicurazione globale » o dello « Excess–loss », il cui effetto è di eliminare la parte della distribuzione di probabilità di $\bar{X}$ che cade al di sotto di $-G$. Se diciamo X il guadagno totale tenuto conto della riassicurazione, sarà precisamente $X = -G$ se $\bar{X} \leq -G + S$, ed $X = \bar{X} - S$ se invece $\bar{X} \geq -G + S$. Per riguardo al problema che ci interessa della stabilità della azienda si potrebbe obbiettare che, se è eliminato il rischio di una perdita superiore al fondo disponibile G, non sono affatto mitigate le probabilità di perdite anche gravi ma non raggiungenti detto limite; si tratterebbe di un'obiezione contro l'impostazione cui per ora ci atteniamo, e solo in seguito si potrebbe quindi accoglierla, ponendoci da altro punto di vista. Ma indipendentemente da ciò varie ragioni rendono poco consigliabile un tale procedimento, che è eccessivamente aleatorio per il riassicuratore, sia per sè stesso, sia per l'impossibilità di determinare razionalmente il premio, che risulta straordinariamente sensibile ad ogni piccola variazione nelle valutazioni di partenza.

Se ci si vuol limitare ai metodi più usuali della riassicurazione individuale dovremo invece cercare la più vantaggiosa non tra le forme di riassicurazione definibili con riferimento al guadagno complessivo $\bar{X}$, ma tra quelle ottenibili riassicurando in opportuna misura ciascun contratto individuale indipendentemente dal risultato degli altri; in tal modo il guadagno aleatorio globale X tenuto conto della riassicurazione sarà sempre esprimibile come somma $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ degli analoghi guadagni aleatorî relativi alla parte non ceduta di ciascuno degli n contratti. Anche nel caso della riassicurazione individuale sono possibili diverse forme, in tutti i casi in cui l'entità del sinistro può essere più o meno grande, come avviene in genere per le assicurazioni elementari in cui si tratta di rifondere il danno subìto (o una parte di esso). L'analogo del procedimento esposto precedentemente è, nel campo dei contratti individuali, quello della cosiddetta « riassicurazione di secondo rischio », in cui il riassicuratore sopporta l'eventuale eccedenza di ogni singolo sinistro sul limite per esso fissato come parte a proprio carico dal cedente. Più comune e semplice è il sistema della normale riassicurazione per eccedente « pro rata », in cui dei contratti che superano un certo grado di rischiosità viene ceduta al riassicuratore una certa quota; il riassicuratore avrà quindi da rifondere la sua quota-parte di danno per un contratto riassicurato indipendentemente dal fatto che il danno sia importante o piccolissimo. Nel caso poi che si abbiano solo due alternative, come nel ramo vita, ove l'assicurato non può che morire o non morire, viene a cadere ogni possibilità di diversi procedimenti di riassicurazione, e il nostro problema si riduce automaticamente a quello dell'ultimo caso.

Anche la trattazione che svolgeremo si limiterà a considerare quest'unica più semplice e importante forma di riassicurazione, sia perchè ci proponiamo di discutere la questione con particolare riferimento al caso delle assicurazioni vita che darà luogo a considerazioni ulteriori dovute a certe caratteristiche sue proprie, sia perchè lo studio delle riassicurazioni di secondo rischio o simili richiederebbe l'esame e la risoluzione preliminare di questioni delicate relative alla commisurazione dei relativi premi, ecc., e sia infine perchè anche contro tale sistema si possono sollevare varie obiezioni pratiche [1].

In definitiva, essendoci ridotti al caso della riassicurazione individuale «pro-rata», il problema si può ora enunciare così: è in nostra facoltà di coprire per nostro conto una generica assicurazione o integralmente (per la quota $a = 1$) o parzialmente, per una quota $a < 1$ (cedendo in riassicurazione la quota residua $1 - a$); bisogna determinare se e quale parte si voglia riassicurare per ogni singola polizza, ossia matematicamente fissare $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(0 \leq a_h \leq 1)$, in modo che, sostituendo $\bar{X}_h$ con $X_h = a_h \bar{X}_h$, e quindi $\bar{X} = \sum \bar{X}_h$ con $X = \sum \bar{\bar{X}}_h = \sum a_h \bar{X}_h$,

1) la diminuzione della probabilità di fallimento risulti la massima possibile a parità della parte di guadagno cui si rinuncia per effetto della riassicurazione;

2) la detta probabilità di fallimento si riduca in modo da ottenere il grado di sicurezza voluto.

Il primo problema si dice del «pieno relativo», in quanto conduce a determinare in quale relazione tra loro debbano fissarsi i pieni per le diverse forme o specie di assicurazioni se si vuole ottenere il miglior risultato a parità di sacrificio; è un problema comunque ben determinato [2]. Il secondo costituisce invece il problema del «pieno assoluto», ed è alquanto più vago sia per il largo grado di arbitrarietà

---

1) Per tutte le questioni qui accennate sui diversi nominati sistemi di riassicurazione si veda, ad es., la comunicazione al Congr. Int. Attuari di Parigi (1937) del Dubois, e quelle di Gran, Hesselberg, ecc.

2) Si tratta precisamente di un problema di «optimum» nel senso delle mie Note *Problemi di «optimum»* e *Problemi di «optimum» vincolato*, «G. I. I. A.», A. VIII, nn. 1-2, 1937. Anche lo svolgimento di questo problema rientra nella trattazione generale data nelle Note citate.

nel fissare il limite della probabilità corrispondente al voluto «grado di sicurezza», sia perchè si richiederebbe una relazione non più solo qualitativa ma anche quantitativa tra modo e misura della riassicurazione da un lato e probabilità di fallimento dall'altro.

Per quanto riguarda l'interpretazione delle considerazioni che stiamo iniziando nel caso dell'assicurazione vita, dobbiamo tener presente e far notare sin d'ora che come «assicurazione relativa a un singolo esercizio» si deve considerare naturalmente la sola assicurazione della «somma sotto rischio» verso il corrispondente «premio di rischio». Pertanto un'applicazione immediata dei risultati che dapprima stabiliremo non avrebbe senso che nel caso della riassicurazione della sola parte di rischio (nella forma sostenuta, ad esempio, recentemente dal Riedel [3]) e in misura da stabilire anno per anno in base alla complessiva somma sotto rischio esistente su una determinata testa. In qual modo le stesse conclusioni si possano trasportare al caso normale della riassicurazione di assicurazioni vita a condizioni originali, riconducendo lo studio di questo nell'àmbito di quello relativo al caso più semplice, vedremo successivamente (n. 9).

2. *Caso di rischi non correlati.* — Quasi tutte le trattazioni sulla teoria del rischio presuppongono la «indipendenza» stocastica (cioè: nel senso del Calcolo delle probabilità) fra le diverse assicurazioni. Discuteremo a parte se e fino a qual punto appaia sensato considerare valida tale ipotesi, sia pure a titolo di prima approssimazione; per ora comunque ci riferiremo anche noi, in un primo momento, a questo caso, in quanto riesce indubbiamente utile e istruttivo chiarire le idee e stabilire le prime conclusioni in relazione alle ipotesi più semplificative.

È noto che se i numeri aleatori (variabili casuali) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sono indipendenti (sottintenderemo d'ora in poi «stocasticamente»), la loro somma X, se n è abbastanza grande, ha una distribuzione di probabilità prossima a quella ben nota di Gauss, purchè sussistano delle restrizioni che non è il caso di riportare [4], ma il cui significato si potrebbe sintetizzare intuitivamente dicendo che nessuna delle X_h deve avere un'influenza troppo sensibile sulla somma X. Con riferimento al nostro caso, nessuna singola assicurazione dev'essere tanto elevata che il guadagno dell'assicuratore nel complesso dell'esercizio

[3] Nella sua comunicazione al Congr. Int. Attuari di Parigi (1937).

[4] Si vedano, ad esempio, i trattati del Castelnuovo, del Lévy, del Cramér, ecc.

dipenda prevalentemente o comunque troppo sensibilmente dal risultato di essa sola.

Poichè tale condizione è ordinariamente sodisfatta – e poichè comunque ci occupiamo del caso in cui si cerca di renderla sodisfatta, se non lo fosse sufficientemente, per mezzo della riassicurazione – appare giustificato ammettere che, nell'ipotesi dell'indipendenza, la distribuzione di probabilità del guadagno complessivo X abbia una forma press'a poco gaussiana. A dir vero non abbiamo neppur bisogno di stabilire quale sia tale forma di distribuzione, se non quando si volesse passare al problema del « pieno assoluto », dove abbiamo bisogno di conoscere numericamente la probabilità di una perdita superiore a un dato effettivo importo; per le considerazioni che avremo dapprima a svolgere sarà invece sufficiente, per riguardo alla distribuzione di probabilità di X, un'ammissione molto più generica e quindi tanto più accettabile: che cioè tale distribuzione di probabilità si conservi praticamente dello stesso « tipo » al variare delle quote $a_1, a_2, \cdots, a_n$ entro il campo corrispondente ai diversi criteri di riassicurazione che interessa considerare. Rammentiamo che due distribuzioni di probabilità si dicono dello stesso tipo quando si riducono l'una all'altra mediante un cambiamento di origine e unità di misura; in particolare, prendendo come origine e come unità di misura rispettivamente il valor medio (speranza matematica) e lo scarto quadratico medio, tutte le distribuzioni di un medesimo tipo si riducono a un'unica distribuzione che si dice « distribuzione ridotta »[5] in quanto è la distribuzione dello scarto « ridotto » (cioè dello scarto assoluto diviso per lo scarto quadratico medio).

L'ammissione che il tipo della distribuzione rimanga praticamente invariabile è essenziale per tutto lo svolgimento da dare al problema, perchè così soltanto ricevono un fondamento razionale tutte le considerazioni basate su certi « indici » del rischio, e in particolare sul cosiddetto « rischio medio (quadratico) », che altro non è che lo scarto quadratico medio. Misurato infatti il rischio con un « indice » qualunque, la nostra ammissione conduce a concludere che

[5] Il « criterio di riduzione » basato sul valor medio e scarto quadratico medio non è naturalmente che uno degli infiniti possibili; useremo però la denominazione di « distribuzione ridotta » sottintendendo di riferirci sempre ad esso, non solo perchè è il più pratico, ma anche perchè la proprietà caratteristica dello scarto quadratico medio di cui alla seguente nota [6] dimostra che esso è l'unico corrispondente in modo adeguato al problema.

per rendere quanto più piccola possibile la probabilità di fallimento basta rendere quanto più piccolo possibile tale «indice» per rapporto al fondo G disponibile. La scelta dell'indice risulta indifferente per rapporto alle conclusioni cui si deve arrivare, e sarà pertanto da farsi in base a considerazioni di opportunità pratica; ciò posto, tale scelta non può esser dubbia, e deve farci adottare come indice lo scarto quadratico medio. Occorre infatti, per lo scopo delle nostre ricerche, poter determinare il valore di detto indice per il complesso delle assicurazioni conoscendone il valore per ogni singola di esse, e di tale proprietà gode notoriamente (nell'ipotesi dell'indipendenza) lo scarto quadratico medio e *nessun altro* indice [6]. Se $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \cdots, \bar{\sigma}_n$

---

6) Non mi consta sia stato finora esplicitamente rilevato che della proprietà predetta gode *esclusivamente* lo scarto quadratico medio, benchè tale osservazione giovi a chiarire il ruolo di tale indice nel Calcolo delle probabilità e nella statistica, e a mostrare che nella sua scelta non ha alcuna parte l'arbitrio.

Precisamente, è facile vedere che un indice (di «variabilità») che goda delle seguenti proprietà 1)–4) si identifica necessariamente con lo scarto quadratico medio:

1) *invarianza per traslazione*: stesso indice per la distribuzione $F(x)$ di X e quella $F(x-a)$ di $X+a$ (a = costante qualunque);

2) *omogeneità*: l'indice della distribuzione $F(x/a)$ di aX è il prodotto di a per quello della distribuzione $F(x)$ relativa ad X;

3) *continuità*: l'indice della distribuzione variabile $F_n(x)$ tende a quello di $F(x)$ se F_n tende ad F in senso opportuno ($F_n(x) \to F(x)$ quasi ovunque, e $\int_{|x|>a} x^2\, dF_n(x) \to 0$ per $a \to \infty$ uniformemente rispetto ad n);

4) *distributività*: l'indice della distribuzione di $X+Y$ (X e Y indipendenti) è funzione degli indici relativi ad X e Y.

Per la proprietà 1) possiamo limitarci a una distribuzione $F(x)$ con valor medio nullo. Consideriamo la distribuzione $F_n(x)$ della somma di n numeri aleatorî indipendenti, tutti con distribuzione di probabilità $F(x)$, e la distribuzione $G_n(x) = F_n(x\sqrt{n})$; sotto condizioni ben note e assai generali che supponiamo verificate per $F(x)$, è $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x/\sigma)$ ove $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\,dx$ è la distribuzione gaussiana ridotta e σ è lo scarto quadratico medio della distribuzione F, cioè $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF(x)$.

Per la distribuzione gaussiana $G(x/\sigma)$ l'indice è, per la proprietà 2), proporzionale a σ, ossia coincide con σ, rimanendo arbitraria soltanto l'unità di misura. Ma l'indice di $F_n(x)$ è, per la proprietà 4), funzione dell'indice di $F(x)$, e altrettanto, sono i « rischi medi », ossia gli scarti quadratici medi di $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \cdots, \bar{X}_n$, lo scarto quadratico medio $\bar{\sigma}$ di $\bar{X}$ è dato, come si sa, da

$$\bar{\sigma}^2 = \bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + \cdots + \bar{\sigma}_n^2,$$

e analogamente per i numeri aleatori

$$X_h = a_h \bar{X}_h \quad \text{e} \quad X = \sum X_h$$

avremo

$$\sigma_h = a_h \bar{\sigma}_h \quad , \quad \sigma^2 = \sum \sigma_h^2 = \sum a_h^2 \bar{\sigma}_h^2 .$$

Le stesse formule valgono poi anche se i rischi non sono indipendenti, purchè siano non–correlati (condizione questa meno restrittiva dell'altra, salvo il caso di numeri aleatori con due soli valori possibili, caso in cui le due condizioni si equivalgono). Il fondo disponibile G dipenderà pure da $a_1, a_2, \cdots, a_n$, in quanto esso sarà normalmente costituito da un importo G_0 già accantonato e dalla parte disponibile dei caricamenti delle assicurazioni in corso; dette $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n$ tali parti di caricamento relativamente alle assicurazioni supposte non riassicurate, esse si ridurranno per effetto della riassicurazione a $c_h = c_h(a_h)$, e sarà $G = G_0 + \sum c_h(a_h)$.

Per caricamento disponibile intendiamo il margine di effettivo guadagno per l'assicuratore, ossia il premio effettivamente riscosso diminuito dell'effettivo premio puro (generalmente inferiore a quello che tale si considera per l'adozione di basi tecniche prudenziali), e delle effettive spese per provvigioni, incasso, gestione. In tal senso il « caricamento disponibile » perduto, $\bar{c}_h - c_h$, è anche l'importo che nell'enunciazione del problema del « pieno relativo » abbiamo detto doversi rendere minimo, e cioè la parte di guadagno cui si rinuncia per effetto della riassicurazione, costituita dalla parte di guadagno cui si rinuncia a favore del riassicuratore più la maggior spesa di gestione che una polizza richiede in quanto riassicurata.

Il problema è così pronto per darne la completa impostazione in forma matematica, che possiamo così riassumere.

---

per la 2), vale per l'indice di $G_n(x)$, e, per la 3), per l'indice della distribuzione limite $G(x/\sigma)$: l'indice della $F(x)$ risulta quindi necessariamente funzione di σ, e pertanto, per la 2), si identifica con σ (salvo, al solito, l'ovvia arbitrarietà dell'unità di misura).

Fissando il criterio di riassicurazione, ossia le quote $a_1, a_2, \cdots, a_n$ da coprire per proprio conto:
il margine di effettivo guadagno dell'assicuratore si riduce da

$$\bar{c} = \sum \bar{c}_h \quad \text{a} \quad c = \sum c_h(a_h)$$

e quindi la massima perdita sopportabile si riduce da

$$\bar{G} = G_0 + \bar{c} \quad \text{a} \quad G = G_0 + c,$$

lo scarto quadratico medio si riduce da

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sum \bar{\sigma}_h^2} \quad \text{a} \quad \sigma = \sqrt{\sum a_h^2 \bar{\sigma}_h^2},$$

il massimo «scarto ridotto» sfavorevole sopportabile, dato dal rapporto $t = G/\sigma$, da

$$\bar{t} = \frac{\bar{G}}{\sqrt{\sum \bar{\sigma}_h^2}} \quad \text{a} \quad t = \frac{G}{\sqrt{\sum \sigma_h^2}} = \frac{G_0 + \sum c_h(a_h)}{\sqrt{\sum a_h^2 \bar{\sigma}_h^2}}.$$

Avendo ammesso che la distribuzione di probabilità dello scarto ridotto sia sempre la stessa, la probabilità di fallimento non dipenderà che da t, e precisamente sarà rappresentata da una funzione decrescente di t, $P(t)$ che sarà in particolare

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-1/2 x^2} \, dx$$

ammettendo che la distribuzione sia gaussiana.

Il problema del pieno relativo si riduce quindi alla determinazione di $a_1, a_2, \cdots, a_n$ in modo che, a parità di G, si renda massimo t (ossia alla determinazione del punto di massimo di t sulle varietà $G = \text{cost.}$); l'espressione di t mostra poi che, sino a quando ci si mantiene sulle varietà $G = \text{cost.}$, cercare il massimo di t equivale più semplicemente a cercare il minimo di σ, ossia il minimo della forma quadratica $\sigma^2 = \sum a_h^2 \bar{\sigma}_h^2$.

Quanto al problema del pieno assoluto, che implica la conoscenza della funzione $P(t)$, non rimane che a stabilire il valore P' della probabilità di fallimento che si ritiene tollerabile; si ricaverà allora da $P(t') = P'$ il corrispondente valore t' di t, e infine, se si indica con $t(G)$ il massimo di t sulle varietà di livello G, da $t(G') = t'$ il corrispondente valore G' di G. La soluzione del problema del pieno assoluto è allora quella del problema del pieno relativo sulla varietà $G = G'$.

3. *Conclusioni relative al caso di non-correlazione.* — Per esprimere in forma esplicita la soluzione del problema in conformità alle conclusioni già implicitamente stabilite, non manca ormai che di precisare la dipendenza di G da $a_1, a_2, \cdots, a_n$, dopo di che la determinazione del massimo di t sulle varietà $G =$ cost. sarà immediata. Prescindendo, come vogliamo fare in un primo tempo, dalle spese di gestione conseguenti alla riassicurazione, tale dipendenza sarà semplicemente lineare; la diminuzione $\bar{G} - G$ dell'importo disponibile non sarà infatti che la parte di premio versata al riassicuratore diminuita delle provvigioni di riassicurazione e del premio puro effettivo (nel senso precedente) corrispondente al rischio ceduto.

La perdita di guadagno così definita è, per ogni polizza, proporzionale alla quota ceduta, sicchè, detta $\bar{k}_h$ la perdita che proverrebbe dalla riassicurazione totale della polizza h-esima, sarà $k_h = (1 - a_h)\bar{k}_h$ la perdita per la cessione della quota $(1 - a_h)$, e quindi $G = \bar{G} - \sum (1 - a_h)\bar{k}_h$.

Le varietà di livello per G sono allora un fascio di iperpiani paralleli, mentre le varietà di livello per σ sono ellissoidiche (concentriche, omotetiche, col centro nell'origine e aventi come assi principali gli assi $a_1 \cdots a_n$); prescindendo dalle limitazioni $0 \leq a_h \leq 1$, la soluzione del problema analitico sarebbe data dalla retta (passante per l'origine) dei punti di tangenza fra ellissoidi e iperpiani, retta che sarebbe definita uguagliando a una costante A (costante rispetto ad h) gli n rapporti di derivate parziali

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial a_h} : \frac{\partial G}{\partial a_h},$$

ossia, essendo

$$\frac{\partial G}{\partial a_h} = \bar{k}_h \quad , \quad \frac{\partial \sigma^2}{\partial a_h} = 2\, a_h \bar{\sigma}_h^2,$$

ponendo $a_h = A\bar{k}_h / \bar{\sigma}_h^2$. A parole: la quota tenuta per proprio conto dovrebb'essere fissata in misura direttamente proporzionale al margine di guadagno e inversamente proporzionale al quadrato del rischio medio.

Perchè tale criterio sia applicabile bisogna però che la costante moltiplicativa A si scelga tanto bassa da far sì che nessuna delle a_h superi l'unità; si dovrebbe giungere cioè a riassicurare tutte le polizze tranne la più piccola (più propriamente: tranne quella – o quelle – cui corrisponde il più piccolo rapporto $\bar{k}_h/\bar{\sigma}_h^2$), ossia a livellare tutti i rischi sulla base di quello minimo. Poichè è da escludere nella normalità dei casi pratici che la riassicurazione abbia a spingersi fino a tale punto, importa essenzialmente vedere come entrino in gioco le limitazioni $0 \leqq a_h \leqq 1$ di cui non s'è ancora tenuto conto.

Sarebbe facile vedere subito e direttamente che la soluzione è la stessa di prima, anche quando la costante A non sia tanto piccola da rendere $\leqq 1$ tutte le a_h, salvo a porre $= 1$ tutte le a_h che risulterebbero superiori all'unità. Ma sarà forse più chiarificatrice la considerazione seguente che ci fa « vedere » la via lungo la quale è più conveniente procedere mano a mano che si voglia diminuire il rischio aumentando la riassicurazione.

Partiamo dal punto iniziale (riassicurazione nulla, quindi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$), in cui $G = \bar{G}$, $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$. Riassicurando delle quote $da_1, da_2, \cdots, da_n$, abbiamo una diminuzione di G e di σ^2 date rispettivamente da

$$dG = -\sum \bar{k}_h \, da_h \text{ [7]} \quad , \quad d\sigma^2 = -2\sum a_h \bar{\sigma}_h^2 \, da_h = -2\sum \bar{\sigma}_h^2 \, da_h \, ;$$

a parità di dG, si ottiene pertanto la massima diminuzione per $d\sigma^2$ riassicurando solo quell'assicurazione per cui il rapporto $\bar{\sigma}_h^2/\bar{k}_h$ è più grande. Supponiamo d'aver numerato le assicurazioni in modo che $\bar{\sigma}_1^2/\bar{k}_1 \geqq \bar{\sigma}_2/\bar{k}_2 \geqq \cdots \geqq \bar{\sigma}_n/\bar{k}_n$; si potrà dire allora che si deve cominciare col riassicurare la prima polizza soltanto. Ciò varrà per lo stesso motivo finchè $\sigma_1^2/k_1 = a_1 \bar{\sigma}_1^2/\bar{k}_1$, non raggiungerà il livello di $\bar{\sigma}_2^2/\bar{k}_2$; da questo momento si dovranno riassicurare in ugual proporzione le due prime assicurazioni (mantenendo cioè il rapporto $\sigma_1^2/k_1 = \sigma_2^2/k_2$, ossia $a_1 \bar{\sigma}_1^2/\bar{k}_1 = a_2 \bar{\sigma}_2^2/k_2$), e poi analogamente le prime tre, le prime quattro, e così di seguito dal momento in cui σ_1^2/k_1, raggiungerà suc-

[7] Che si tratti di una diminuzione e non di un aumento lo ammettiamo in quanto supponiamo positive le $\bar{k}_h$; il caso opposto significherebbe infatti che il premio di riassicurazione (al netto delle relative provvigioni) ci appare inferiore al premio puro effettivo, e in tal caso (a parte la sua inverosimiglianza) il problema cadrebbe, perchè converrebbe riassicurare totalmente le assicurazioni per cui sussistesse tale anomalia (non solo per diminuire il rischio, ma anche per realizzare un guadagno).

cessivamente $\bar{\sigma}_3^2/\bar{k}_3$, $\bar{\sigma}_4^2/\bar{k}_4$ ecc.; raggiunto che fosse $\bar{\sigma}_n^2/\bar{k}_n$, varrebbero le relazioni precedentemente stabilite senza riguardo alle disuguaglianze $0 \leq a_h \leq 1$. È manifesto che il procedimento, descritto ora nella forma più intuitivamente significativa, si riduce analiticamente a considerare le a_h definite sempre dalla relazione $a_h = A\,\bar{k}_h/\bar{\sigma}_h^2$, salvo sostituire con $a_h = 1$ i valori maggiori di 1, e nel diminuire la costante A dal valore per cui tutte le a_h vanno poste uguali ad 1 fino a che divengono tutte inferiori all'unità, e poi fino a zero. Geometricamente, la linea percorsa risulta una spezzata congiungente il punto unitario $(1, 1, \cdots, 1)$ all'origine $(0, 0, \cdots, 0)$; l'ultimo segmento è il tratto della retta $a_h = A\,\bar{k}_h/\bar{\sigma}_h^2$ interno all'ipercubo $0 \leq a_h \leq 1$, mentre i precedenti sono le proiezioni (ortogonali) di tratti della medesima retta successivamente sulle facce a $n-1, n-2, \cdots, 3, 2$ dimensioni e finalmente sullo spigolo, man mano che la retta e le proiezioni successive (qui parlando in senso retrogrado rispetto alla precedente descrizione) uscirebbero dall'ipercubo.

Rimane a discutere come vari al variare della riassicurazione il massimo scarto ridotto sopportabile, che abbiamo indicato con t (e ricordiamo per non doverlo ripetere tra poco che analizzando il modo di variare di t si stabilisce in sostanza il modo di variare della probabilità di fallimento P che ne è funzione decrescente). Lungo la spezzata dei massimi t è una funzione di G, che è poi quella che già indicammo con $t(G)$; per evitare complicazioni converrà però studiare t come funzione di A, il che è equivalente, dato che G è funzione crescente di A. Conviene introdurre e indicare con $A_1, A_2, \cdots \cdots, A_n$ i valori di A corrispondenti ai punti in cui comincia a doversi riassicurare la prima, seconda, $\cdots$, n-esima polizza, e cioè $A_h = \bar{\sigma}_h^2/\bar{k}_h$; porremo inoltre $A_{n+1} = 0$. In ogni intervallo $A_{h+1} \leq A \leq A_h$ avremo le seguenti espressioni esplicite delle a_j e di G e σ^2 in funzione di A

$$a_j = A\,\frac{\bar{k}_j}{\bar{\sigma}_j^2} = \frac{A}{A_j} \quad \text{per} \quad j \leq h \quad , \quad a_j = 1 \quad \text{per} \quad j > h\,;$$

$$G = \bar{G} - \sum (1 - a_j)\,\bar{k}_j = \bar{G} - \sum_{1}^{h}{}_j \left(1 - A\,\frac{\bar{k}_j}{\bar{\sigma}_j^2}\right)\bar{k}_j =$$

$$= (\bar{G} - \sum_{1}^{h} \bar{k}_j) + A \sum_{1}^{h} \bar{k}_j^2/\bar{\sigma}_j^2 = \bar{G}_h + AB_h\,;$$

$$\sigma^2 = \sum a_j^2 \bar{\sigma}_j^2 = A^2 \sum_{1}^{h}{}_j \left(\frac{\bar{k}_j}{\bar{\sigma}_j^2}\right)^2 \bar{\sigma}_j^2 + \sum_{h+1}^{n}{}_j\, \bar{\sigma}_j^2 =$$

$$= A^2 \sum_{1}^{h}{}_j\, \bar{k}_j^2/\bar{\sigma}_j^2 + \sum_{h+1}^{n}{}_j\, \bar{\sigma}_j^2 = A^2 B_h + S_h\,.$$

Abbiamo così tutti gli elementi per discutere l'andamento di t, o meglio di $1/t^2$ onde evitare il radicale, al variare di A. È infatti

$$\frac{1}{t^2} = \frac{\sigma^2}{G^2} = \frac{A^2 B_h + S_h}{(AB_h + \bar{G}_h)^2}$$

$$\frac{d}{dA}\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{(AB_h + \bar{G}_h)^3}[2AB_h(AB_h + \bar{G}_h) - 2(A^2 B_h + S_h) B_h] =$$

$$= \frac{2B_h}{(AB_h + \bar{G}_h)^3}[A\bar{G}_h - S_h] = \frac{2B_h}{G^3}[A\bar{G}_h - S_h]$$

od anche

$$\frac{d}{dA}\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{2B_h}{G^3}[AG - \sigma^2]$$

perchè

$$AG - \sigma^2 = A(\bar{G}_h + AB_h) - (A^2 B_h + S_h) = A\bar{G}_h - S_h.$$

Il fattore $A\bar{G}_h - S_h$ è lineare in ciascun intervallo

$$A_{h+1} \leqq A \leqq A_h,$$

è continuo, come si vede verificando che

$$A_h G_h - S_h = A_h G_{k-1} - S_{h-1},$$

ed è concavo, come risulta essendo $\bar{G}_{h-1} > \bar{G}_h$; esso è quindi rappresentato da una poligonale continua concava verso l'alto e coi vertici in corrispondenza delle ascisse $A_n, A_{n-1}, \cdots, A_2 A_1$. Tale poligonale passa poi per l'origine, essendo, per $A = A_{n-1} = 0$,

$$A\bar{G}_n - S_n = 0 - 0 = 0;$$

ne consegue che, a seconda che $\bar{G}_n$ è positiva, nulla o negativa – ossia, geometricamente, a seconda che il tratto iniziale è crescente, costante o decrescente – la poligonale rappresenterà dunque una funzione di A $(0 = A_{n+1} \leqq A \leqq A_1)$ sempre positiva, oppure nulla per $0 = A_{n+1} \leqq A \leqq A_n$ e poi positiva, oppure negativa in un intervallo che può estendersi a tutto il campo $0 = A_{n+1} < A \leqq A_1$ oppure a un intervallo iniziale da 0 ad un punto $A' < A_1$ al di là del quale diviene positiva.

Esaminiamo separatamente i tre casi. Cominciamo col rilevare il significato di $\bar{G}_n = \bar{G} - \sum_1^n {}_j \bar{k}_j$: esso è l'importo G corrispondente al valore $A = 0$, ossia all'ipotesi di riassicurazione totale di tutte le assicurazioni. Se supponiamo nullo il fondo preesistente G_0, sarà dunque $\bar{G}_n$ positivo, nullo o negativo a seconda che la riassicurazione dell'intero portafoglio si effettuerebbe a condizioni complessivamente meno, ugualmente o più gravose di quelle originali di accettazione; se esiste un fondo G_0 non nullo, esso rende positivo $\bar{G}_n$ anche in quest'ultimo caso purchè esso sia sufficiente a coprire la supposta eccedenza del costo di riassicurazione del portafoglio su quello di accettazione. Il caso normale sarà, per entrambe le ragioni predette, quello di $\bar{G}_n$ positivo; allora anche G per ogni $A > 0$ è positivo mentre i B_h lo sono necessariamente; perciò la derivata di $1/t^2$ è sempre positiva, e quindi il grado di sicurezza aumenta sempre più quanto più si aumenta la riassicurazione. Precisamente t parte dal valore iniziale $\bar{G}/\bar{\sigma}$ (riassicurazione nulla) e cresce continuamente al diminuire di A fino a superare ogni limite quando ci si avvicini alla riassicurazione totale ($t = G/\sigma \rightarrow \bar{G}_n/0 = \infty$). Se $\bar{G}_n$ è nullo, le conclusioni sono le stesse, salvo che il grado di sicurezza cessa di crescere, e rimane costante, a partire dal momento in cui tutte le polizze cominciano a venir riassicurate (cioè da $A = A_n$), perchè tanto G che σ si conservano da quel punto proporzionali alla parte coperta per proprio conto, ossia ad A: infatti

$$G = A \sum \bar{k}_h^2/\bar{\sigma}_h^2 \quad , \quad \sigma^2 = A^2 \sum \bar{k}_h^2/\bar{\sigma}_h^2 .$$

Se invece $\bar{G}_h$ è negativo, si deve osservare anzitutto che anche G sarà negativo per A inferiore a un certo valore A'', che rappresenterà il punto oltre il quale la riassicurazione non si può spingere causa l'esaurimento di tutto il margine disponibile: il valore di A'' si calcola dall'equazione $\bar{G}_h + AB_h = 0$ $(A_{h+1} \leq A \leq A_h)$, o, per esprimersi in modo più concreto, interpolando linearmente tra i valori A_{h+1} ed A_h cui corrispondono rispettivamente l'ultimo valore di G negativo $\bar{G}_{h+1} + A_{h+1} B_{h+1}$ ed il primo positivo $\bar{G}_h + A_h B_h$. Interessa naturalmente solo il tratto $A'' \leq A \leq A_1$; per $A = A''$ poi $t = G/\sigma$ è ovviamente nullo insieme a G, cosicchè in un intervallo a destra di A'' la t sarà certamente crescente al crescere di A (del resto, perchè $\bar{G}_h + A'' B_h$ sia nullo dev'essere $\bar{G}_h$ negativo e quindi lo è dt^{-2}/dA). Si tratterà di distinguere i due casi possibili: che t ammetta un massimo per un valore $A = A' < A_1$, oppure che il massimo si abbia per $A = A_1$, il che significa che la riassicurazione non può che diminuire il grado di sicurezza, in qualunque modo e misura la si effettui. Quest'ultimo caso si verifica quando dt^{-2}/dA si conserva negativo fino ad $A = A_1$ (o al più vi si annulla), e cioè quando $A_1 \bar{G}_1 - S_1 \leq 0$ (gli altri fattori essendo senz'altro positivi). Sostituendo A_1 ecc. con le loro espressioni la condizione diviene

$$\bar{k}_1 \geq \bar{G}\frac{\bar{\sigma}_1^2}{\bar{\sigma}^2}, \quad \text{ossia} \quad \bar{G} \leq \frac{\bar{k}_1}{\bar{\sigma}_1^2}\bar{\sigma}^2, \quad \text{od anche} \quad \bar{\sigma}_1^2 \leq \frac{\bar{k}_1}{\bar{G}}\bar{\sigma}^2;$$

essa significa che la riassicurazione non può migliorare il grado di sicurezza se già per la prima polizza – e ciò equivale a dire: se per ogni polizza – il margine di guadagno $\bar{k}_1$ che si perde riassicurandola, considerato in rapporto al margine totale G, risulta proporzionale o più che proporzionale alla diminuzione del quadrato del rischio. La disuguaglianza si può anche scrivere in modo da rendere forse in forma più espressiva tale concetto: dev'essere $A_1 \leq A_0$ con $A_0 = \bar{\sigma}^2/\bar{G}$, ossia la riassicurazione di un'unica polizza che comprendesse il rischio dell'intero portafoglio implicando la rinuncia all'intero margine di guadagno $\bar{G}$ precederebbe tutte le polizze nell'ordine di precedenza nella riassicurazione data da $A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \cdots \geq A_n$. Nel caso opposto la riassicurazione porta un miglioramento nel grado di sicurezza finchè si giunga ad un punto A' dove cominci a manifestarsi la medesima circostanza; nel punto di massimo infatti, definito dall'annullarsi della derivata ossia del fattore $AG - \sigma^2$, si ha appunto $A' = \sigma^2/G$, ed $1/A' = G/\sigma^2$ rappresenta appunto il rapporto k_j/σ_j^2 relativo a un'ulteriore riassicurazione delle polizze raggiunte dal processo di cessione. Per il calcolo di A' converrebbe praticamente procedere col metodo d'interpolazione illustrato per A'', prendendo $AG - \sigma^2$ nella forma lineare $A\bar{G}_h - S_h$.

Riassumendo, abbiamo a distinguere quattro casi caratterizzati rispettivamente da

$$\text{I)}\ \bar{G}_n > 0 \quad , \quad \text{II)}\ \bar{G}_n = 0 \quad , \quad \text{III)}\ \bar{G}_n < 0 \ \text{ e } \ \bar{k}_1 < \bar{G}\frac{\bar{\sigma}_1^2}{\bar{\sigma}^2},$$

$$\text{IV)}\ \bar{G}_n < 0 \ \text{ e } \ \bar{k}_1 > \bar{G}\frac{\bar{\sigma}_1^2}{\bar{\sigma}^2}.$$

L'andamento di t in funzione di A per ciascun caso, qualitativamente, è quello indicato nella Fig. 1. Si avverta però che in realtà le curve hanno dei punti angolosi in corrispondenza alle ascisse $A = A_h$, causa il fattore discontinuo B_h. Solo i tratti ascendenti (all'aumentare della riassicurazione, ossia procedendo da destra a sinistra) hanno interesse per il problema Per riassumere nuovamente, tenendo conto delle circostanze ora rilevate, anche le conclusioni precedenti, facciamo addirittura contemporaneamente un cambiamento di forma, utile per interpretarle in modo più direttamente significativo per la pratica. Nella pratica infatti l'entità di un'assicurazione è per solito caratterizzabile e caratterizzata dall'importo detto « capitale assicurato » o « somma assicurata » [8]. Senza discutere tale nozione,

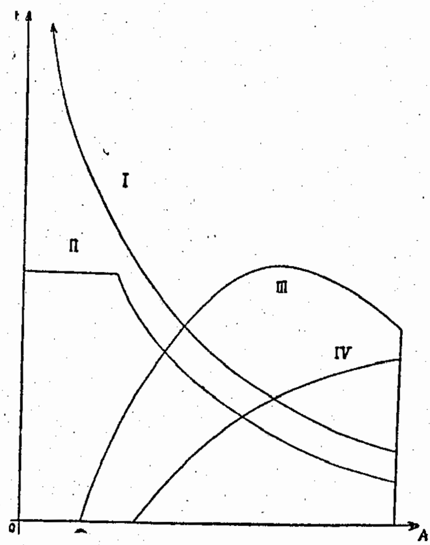

Fig. 1.

di significato spesso ovvio, ma talora invece affatto convenzionale, indichiamo con $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$ le somme assicurate delle n polizze. Le somme tenute per proprio conto saranno allora $C_1 = a_1 \bar{C}_1$, $C_2 = a_2 \bar{C}_2, \ldots, C_n = a_n \bar{C}_n$, ed avremo

$$C_j = a_j \bar{C} = A \frac{(\bar{k}_j/\bar{C}_j)}{(\bar{\sigma}_j/\bar{C}_j)^2},$$

rispettivamente $C_j = \bar{C}_j$ se l'espressione precedente desse $C_j > \bar{C}$. I valori C_j non dovranno cioè superare certi limiti o « pieni », che

[8] Rammentiamo che nel caso dell'assicurazione vita dobbiamo qui intendere sempre la « somma sotto rischio ».

rimangono determinati, in base ai concetti costituenti il problema del pieno relativo, a meno del fattore A, e sono precisamente proporzionali al rapporto fra il margine unitario di guadagno perduto per la riassicurazione, e il quadrato del rischio unitario.

Per ogni $A \geqq A'$ ($A' = 0$ nel I caso, $A' = A_n$ nel II, A' dato da $AG - \sigma^2 = 0$ nel III, $A' = A_1$ nel IV) si ha in tal modo una soluzione del problema di optimum di rendere massimo il grado di sicurezza a parità di guadagno, ossia massimo il guadagno a parità di sicurezza; precisamente abbassando i pieni (col diminuire A) si riduce in ogni caso il guadagno, e si aumenta la sicurezza (finchè non si giunge ad $A = A'$, punto oltre cui non conviene procedere).

4. *Influenza delle spese di riassicurazione.* – Vogliamo ora esaminare quali modificazioni s'incontrano volendo tener conto dell'altro elemento finora trascurato: le spese di gestione conseguenti alla riassicurazione. Si tratta del costo del lavoro amministrativo e contabile richiesto da una polizza riassicurata, e quindi dipende dalla forma d'assicurazione (sarà ad esempio notevolmente maggiore per assicurazioni a premio decrescente) e dal numero dei riassicuratori, ma non dall'importo ceduto (salvo variazioni brusche quando la sua elevatezza obblighi a ripartire la cessione fra un maggior numero di riassicuratori). Prescindendo da quest'ultima eventualità, considereremo fisse le spese $g_1, g_2, \cdots, g_n$ causate dalla riassicurazione delle polizze $1, 2, \cdots, n$, cosicchè l'espressione di G diverrà

$$G = \bar{G} - \sum{}' (1 - a_h) \bar{k}_h - \sum{}' g_h$$

ove $\sum'$ indichi la sommatoria estesa a tutti gli h per cui $a_h \neq 1$. Le varietà $G = \text{cost.}$ saranno dunque gli stessi iperpiani del caso precedente, salvo un'alterazione del valore sulle loro intersezioni colle facce a $n-1, n-2, \cdots$, dimensioni dell'ipercubo $0 \leqq a_h \leqq 1$ in confronto di quello che portano all'interno di esso. Poichè il già risolto problema di minimo relativo ad una faccia qualsiasi conduce a stabilire la proporzionalità $a_h = A\bar{k}_h/\bar{\sigma}_h^2$ fra tutti gli a_h che non sono identicamente eguali a uno sulla faccia considerata, la soluzione del problema nelle ipotesi più generali ora ammesse differirà soltanto in ciò dalla precedente: che, pur avendo stabiliti i pieni corrispondenti a un certo valore della costante A, potrà apparire opportuno non riassicurare alcune assicurazioni eccedenti il rispettivo pieno (e ciò precisamente quando l'eccedenza non sia tale da giustificare la spesa g di riassicurazione).

Ciò che complica la trattazione di questo caso rispetto alla precedente è il fatto che non soltanto il punto di « optimum » $(a_1, a_2, \cdots, a_h)$ segue una spezzata discontinua, anzichè continua come precedentemente, al variare di G (cosicchè quando G oltrepassa certi valori critici si salta bruscamente da un punto a un altro punto lontano), ma non avviene neppur più, in generale, che, procedendo a una riassicurazione in misura maggiore, si debba aumentare la riassicurazione delle polizze già in parte riassicurate ed eventualmente cominciare a riassicurarne qualche altra; potrà darsi invece, nel nuovo caso, che una polizza che dovrebbe esser riassicurata a un certo livello di riassicurazione non debba più esserlo affatto a un livello più spinto. Per convincersene immediatamente basti pensare che la prima polizza a doversi riassicurare sarà necessariamente quella cui corrisponde la più piccola spesa di riassicurazione, sia g_h, perchè per G compreso tra $\bar{G} - g_h$ e $\bar{G} - g_k$ (ove g_k sia la seconda delle g_i in ordine di grandezza) nessun'altra soluzione è possibile. Ma se alla polizza k-esima, pur essendo $g_k > g_h$, corrisponde un valore A_k, sufficentemente piccolo rispetto ad A_h, potrà convenire, oltrepassato di poco $G = \bar{G} - g_k$, riassicurare soltanto quest'ultima polizza e non quella di prima. Insomma: il criterio della convenienza è influenzato prevalentemente dapprima dalla spesa costante, ma poi naturalmente del coefficiente da cui dipenderebbe in assenza di spese, e cioè dal solito rapporto $\bar{k}_h/\bar{\sigma}_h^2 = 1/A_h$.

Tale difficoltà non può comunque presentarsi se la spesa si suppone unica $(g_1 = g_2 = \cdots = g_h)$, o, più in generale, se essa varia nello stesso senso dei rapporti $\bar{k}_h/\bar{\sigma}_h^2$. Allora il problema si semplifica perchè i lati della spezzata non possono essere altri che quelli del caso senza spese $(g_h = 0)$, e la differenza sta soltanto nel fatto che, giunti ad un vertice della spezzata, conviene procedere sul prolungamento del lato precedente fino al momento in cui non convenga saltare sul lato successivo. Sul lato h-esimo, ed anche sul suo prolungamento, avremo

$$G = \bar{G}_h + AB_h - (g_1 + g_2 + \cdots + g_h) \quad , \quad \sigma^2 = A^2 B_h + S_h ,$$

mentre sul lato successivo sarà

$$G = \bar{G}_{h+1} + AB_{h+1} - (g_1 + g_2 + \cdots + g_{h+1}) \quad , \quad \sigma^2 = A^2 B_{h+1} S_{h+1} ;$$

per determinare la coppia di punti fra cui avviene il salto dovremo quindi trovare due coppie di valori (G, σ^2) uguali tra loro ottenuti rispettivamente dalle prime o dalle seconde espressioni (naturalmente, con valori diversi del parametro A).

Sia precisamente $A_{h+1} - x$ il valore di A nel punto fino a cui conviene procedere sul prolungamento dell'h–esimo tratto, e dal quale si deve saltare al primo punto « utile » sul tratto $(h+1)$–esimo, punto che corrisponderà al valore $A_{h+1} - y$ di A. Avremo il sistema di due equazioni a due incognite

$$\bar{G}_h + (A_{h+1} - x) B_h - (g_1 + g_2 + \cdots + g_h) =$$

$$= \bar{G}_{h+1} + (A_{h+1} - y) B_h - (g_1 + g_2 + \cdots + g_{h+1}),$$

$$(A_{h+1} - x)^2 B_h + S_h = (A_{h+1} - y)^2 B_{h+1} + S_{h+1};$$

sottraendo dalla prima l'identità

$$\bar{G}_h + A_{h+1} B_h = \bar{G}_{h+1} + A_{h+1} B_{h+1}$$

e dalla seconda – dopo sviluppati i quadrati – l'identità

$$A_{h+1}^2 B_h + S_h = A_{h+1}^2 B_{h+1} + S_{h+1}$$

si ha

$$y B_{h+1} - x B_h = g_{h+1},$$

$$y^2 B_{h+1} - x^2 B_h = 2 A_{h+1} (x B_h - y B_{h+1}) = 2 A_{h+1} g_{h+1}.$$

Sostituendo nella seconda il valore di y in funzione di x ricavato dalla prima si ottiene la soluzione risolvendo un'equazione di secondo grado. Ci limiteremo a dare l'espressione asintotica di x e y per g_{h+1} piccolo, il che è più significativo. Per $x \to 0$, $y \to 0$ si vede che $x B_h - y B_{h+1}$ è infinitesimo d'ordine superiore al primo, cosicchè in prima approssimazione $y = \dfrac{B_h}{B_{h+1}} x$; con tale posizione è

$$y^2 B_{h+1} - x^2 B_h = - B_h x^2 \frac{B_{h+1} - B_h}{B_{h+1}} = - \frac{B_h}{B_{h+1}} \frac{\bar{k}_{h+1}^2}{\bar{\sigma}_{h+1}^2} x^2 =$$

$$= - \frac{B_h}{B_{h+1}} \frac{\bar{k}_{h+1}}{A_{h+1}} x^2 = - 2 A_{h+1} g_{h+1}$$

da cui

$$x^2 = 2 A_{h+1}^2 \frac{B_{h+1}}{B_h} \frac{g_{h+1}}{\bar{k}_{h+1}} \quad , \quad y^2 = 2 A_{h+1}^2 \frac{B_h}{B_{h+1}} \frac{g_{h+1}}{\bar{k}_{h+1}}.$$

Per farsi un'idea quantitativa del risultato nel caso praticamente più interessante in cui vi siano numerose polizze e non distribuite troppo discontinuamente secondo i valori A_h, supporremo prossimo all'unità il rapporto B_h/B_{h+1}; avremo allora semplicemente

$$x \simeq y \simeq A_{h+1}\sqrt{2\frac{g_{h+1}}{\bar{k}_{h+1}}}\,.$$

Ciò vuol dire che al momento in cui si dovrebbe cominciare a riassicurare la $(h+1)$–esima polizza converrà invece riassicurare ulteriormente le precedenti finchè i coefficenti $a_1\, a_2 \cdots a_h\ (a_j = A_{h+1}/A_j)$ non si riducano ad $a'_j = (A_{h+1} - x)/A_j = \left(1 - \frac{x}{A_{h+1}}\right)a_j$, non raggiungano cioè la riduzione percentuale di $x/A_{h+1} \simeq \sqrt{2g_{h+1}/\bar{k}_{h+1}}$, che diremo «soglia di trapasso», e che dipende, come si vede, dalla entità della spesa di riassicurazione g_{h+1} in rapporto alla perdita di guadagno $\bar{k}_{h+1}$ nel caso di riassicurazione totale. Per tradurre in una norma empirica la conclusione, si potrebbe, ad esempio, stabilire di non riassicurare le polizze che non superano di una certa percentuale minima il pieno: per $x = 25\,\%$, e supposto il pieno = 100, ciò vorrebbe dire che una polizza di 110, 120, 124, non viene ancora riassicurata, mentre se giunge a 125, 130, 180, ... si riassicura 25, 30, 80, ... Tale esempio numerico corrisponderebbe a una «soglia» del 20 % (125 (1–0,20) = 100), e quindi a un rapporto $g/\bar{k} = 0{,}02$, ossia alla ipotesi che la spesa di gestione di una polizza riassicurata (prossima al valore di «pieno») ammonti al 2 % del guadagno che si perderebbe riassicurandola totalmente (cifra questa che sembra abbastanza plausibile quanto ad ordine di grandezza). A parte la giustificazione teorica, un simile procedimento è praticamente raccomandabile perchè la semplificazione nei lavori d'ufficio e la possibilità di una loro riduzione, standardizzazione, meccanizzazione, come sa chi ne abbia un po' di pratica, non saranno mai apprezzate e attuate eccessivamente.

5. *Caso di rischi correlati.* — Consideriamo ora il caso generale in cui i rischi possono essere invece correlati tra loro.

Non è difficile estendere a tale caso la trattazione sin qui svolta, perchè non abbiamo che da tener conto dei termini rettangolari nell'espressione di σ. Ma è necessario riprendere le considerazioni preliminari con cui al principio del n. 2 si è cercato di giustificare l'ipotesi che la distribuzione di probabilità dello scarto complessivo risulti gaussiana o almeno abbia sempre una medesima distribuzione ridotta (almeno entro quel certo campo di variabilità che ci può interessare praticamente per le quote $a_1 \cdots a_n$), perchè nel nuovo caso quelle giustificazioni non valgono più. Nel nuovo caso è ovvio che ogni giustificazione possibile sarà più vaga, più incompleta, e basata su certe supposizioni più o meno plausibili che comunque dovranno restringere in qualche modo l'illimitata indeterminatezza dell'ipotesi che esista una correlazione (è certo infatti che, sotto una condizione così generale, l'asserto sarebbe falso).

Ma se ammettiamo che la correlazione abbia luogo principalmente fra rischi simili per effetto di circostanze che esercitano su di essi una stessa influenza aumentando o diminuendo le relative probabilità, e che la distribuzione di probabilità dell'influenza di tali fattori sulla probabilità sia gaussiana od abbia comunque una forma analoga, la conclusione precedente è ancora giustificabile. Supponiamo, per riferirci al caso più semplice, che sia all'incirca gaussiana la distribuzione di probabilità $f(x)dx$ che si verifichi un certo complesso di circostanze subordinatamente al quale n eventi assicurati si giudicano indipendenti e aventi una medesima probabilità x; indicheremo con $\bar{x} = \int x f(x)\, dx$ la probabilità prima di conoscere dette circostanze, e con C_h al solito i capitali assicurati. Supposte note quelle tali circostanze e quindi il valore di x, la distribuzione di probabilità dello scarto complessivo sarà (sotto le condizioni del n. 2 e approssimativamente) gaussiana con speranza matematica $(x - \bar{x}) \sum \bar{C}_h$ e scarto quadratico medio $\sqrt{x(1-x) \sum \bar{C}_h^2}$. La distribuzione di probabilità $\varphi(y)$ per lo scarto complessivo, prima di conoscere le circostanze da cui dipende x, sarà pure prossima a quella gaussiana se si considera che lo scarto complessivo $y - \bar{y}$ è la somma di $y - x \sum \bar{C}_h$ (scarto rispetto alla speranza matematica subordinata alla conoscenza di x) e di $(x - \bar{x}) \sum \bar{C}_h$ (scarto tra la speranza matematica quale la si giudicherebbe conoscendo le circostanze dette, e quella primitiva). I due numeri aleatori sono gaussiani, e non sono indipendenti solo in quanto il primo di essi ha scarto quadratico medio variabile con x, ossia dipendente dal valore del secondo numero aleatorio. Se però (come è ragionevole ammettere nella maggior parte dei casi) la variabilità di x intorno ad $\bar{x}$ è abbastanza piccola, le conclusioni non si alterano sostanzialmente quando si trascuri in prima approssimazione la variabilità dello scarto quadratico medio ponendo $\sqrt{x(1-x)\sum \bar{C}_h^2} = \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})\sum \bar{C}_h^2}$, e si vede che la distribuzione dello scarto è allora ancora *grosso modo* gaussiana con scarto quadratico medio $\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})\sum \bar{C}_h^2 + \sigma_x^2 (\sum C_h)^2}$, con σ_x scarto quadratico medio di x, ossia $\sigma_x^2 = \int (x-\bar{x})^2 f(x)\, dx$.

Ammettiamo comunque che la distribuzione di probabilità dello scarto complessivo abbia all'incirca anche ora la medesima forma ridotta, cosicchè la probabilità che lo scarto superi un dato importo dipenda solo dallo scarto quadratico medio. Tutta la trattazione precedente rimane allora valida pur di prendere per $\bar{\sigma}$ l'espressione corrispondente alla nuova ipotesi, e che è, come è noto,

$$\bar{\sigma}^2 = \sum\nolimits_h \bar{\sigma}_h^2 + \sum\nolimits_{jh}' r_{jh}\, \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_h$$

ove r_{jh} è il coefficente di correlazione fra le assicurazioni j-esima ed h-esima, e $\sum'$ indica la somma estesa alle coppie con $j \neq h$. Analogamente, quando si ricorra alla riassicurazione tenendo per proprio conto le percentuali a_h,

$$\sigma^2 = \sum\nolimits_h \sigma_h^2 + \sum\nolimits_{jh}' r_{jh}\, \sigma_j \sigma_h = \sum\nolimits_h a_h^2 \bar{\sigma}_h^2 + \sum\nolimits_{jh}' r_{jh}\, a_j a_h \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_h ,$$

e quindi

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial a_h} = 2\, a_h \bar{\sigma}_h^2 + 2 \sum\nolimits_j^{(h)} a_j r_{jh}\, \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_h$$

ove $\sum_j^{(h)}$ indichi la somma estesa agli $j \neq h$. Facendo i rapporti $\frac{\partial \sigma^2}{\partial a_h} : \frac{\partial G}{\partial a_h}$ otterremo perciò ancora n funzioni lineari delle a_j

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial a_h} : \frac{\partial G}{\partial a_h} = 2\, a_h \frac{\bar{\sigma}_h^2}{\bar{k}_h} + 2 \sum\nolimits_j^{(h)} a_j r_{jh}\, \bar{\sigma}_j \frac{\bar{\sigma}_h}{\bar{k}_h} ,$$

e preferiamo scriverle addirittura riferendoci ai capitali assicurati e ai pieni (colle notazioni introdotte alla fine del n. 3)

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial a_h} : \frac{\partial G}{\partial a_h} = 2\, C_h \frac{(\bar{\sigma}/\bar{C}_h)^2}{(\bar{k}/\bar{C}_h)} +$$

$$+ 2 \sum\nolimits_j^{(h)} C_j r_{jh} \frac{(\bar{\sigma}_j/\bar{C}_j)(\bar{\sigma}/\bar{C}_h)}{\bar{k}_h/\bar{C}_h} = K_h (C_1, C_2, \dots, C_n)$$

od anche

$$K_h(C_1, C_2, \cdots, C_n) = \frac{2\bar{\sigma}_h}{\bar{k}_h}\left(\bar{\sigma}\,\frac{C_h}{\bar{C}_h} + \sum\nolimits_j^{(h)} r_{jh}\,\sigma_j\,\frac{C_j}{\bar{C}_j}\right).$$

Il massimo di σ^2 per $G =$ cost. si troverebbe dunque uguagliando le n funzioni lineari K_h, ossia risolvendo il sistema di n equazioni lineari $K_1(C_1 \cdots C_n) = K_2(C_1 \cdots C_n) = \cdots = K_n(C_1 \cdots C_n)$; $G(C_1 \cdots C_n) = = G =$ cost. data.

Ma anche qui tali uguaglianze sarebbero tutte realizzate solo quando si giungesse al punto (praticamente fuori questione) di riassicurare tutte le polizze; altrimenti dovranno essere uguali tra loro un certo numero $m < n$ delle n funzioni K_h, e le altre saranno minori, in modo da lasciare inalterate (non riassicurate) $n - m$ somme assicurate: $C_h = \bar{C}_h$ per $n - m$ indici h. L'interpretazione geometrica data pel caso di non-correlazione rimane sostanzialmente inalterata, in quanto la linea dei punti di « optimum » per σ a parità di G è una spezzata continua congiungente il punto di partenza $(\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_n)$ all'origine $(0, 0, \cdots, 0)$. Essa si muove dapprima su di uno spigolo dell'ipercubo $0 \leq a_h \leq 1$ (nelle C_h sarebbe più propriamente un « iperprisma rettangolo » $0 \leq C_h \leq \bar{C}_h$) e precisamente diminuendo solo la polizza h-esima per cui K_h è il più grande dei K_j nel punto $(\bar{C}_1, \cdots, \bar{C}_n)$; supporremo sempre ordinati gli indici in modo che ciò avvenga per K_1. Su tale spigolo si procede finchè s'incontri un piano $K_1 = K_h$, e sia $K_1 = K_2$; da allora si riassicurano le prime due movendosi sulla retta intersezione del piano $K_1 = K_2$ colla faccia a 2 dimensioni $C_3 = \bar{C}_3, C_4 = \bar{C}_4, \cdots, C_n = \bar{C}_n$, e ciò fino ad incontrare un altro $K_1 = K_h$, e sia $K_1 = K_3$; si comincia a riassicurare anche la terza polizza movendosi sulla retta intersezione del piano $(n-2)$-dimensionale $K_1 = K_2 = K_3$ colla faccia a 3 dimensioni $C_4 = \bar{C}_4, C_5 = \bar{C}_5, \cdots, C_n = \bar{C}_n$, e ciò fino a $K_1 = K_2 = K_3 = K_4$, e così di seguito, finchè finalmente si percorrerà l'ultimo tratto all'interno dell'ipercubo lungo la retta $K_1 = K_2 = \cdots = K_n$. Ma si ha una complicazione maggiore (quando non ci si limiti a indicazioni date in modo tanto generico) per il fatto, analiticamente parlando, che gli assi principali dell'ellissoide $\sigma =$ cost. non sono più gli assi cordinati, e pertanto gli iperpiani $K_h =$ cost. non sono paralleli agli iperpiani coordinati. E non si tratta di una semplice questione di riferimento sanabile con un cambiamento di coordinate, perchè il sistema di riferimento agli assi C_h è legato alla natura intrinseca del problema, in quanto essi costituiscono gli spigoli dell'ipercubo dei punti ammissibili; riferendoci, per semplificare l'espressione di σ eliminandone i termini rettangoli, a nuovi assi (assi principali dell'ellissoide), si creerebbe in compenso una complicazione venendo ad avere in posizione obliqua l'ipercubo.

Dal punto di vista dell'interpretazione attuariale, tale complicazione si manifesta essenzialmente in tre modi, e precisamente nel fatto che vengono a cadere tre delle circostanze che abbiamo messo in luce nelle conclusioni relative al caso di non–correlazione. Intanto non è detto che l'ordine $K_1, K_2, \cdots, K_n$ in cui s'incontrano successivamente le polizze da riassicurare sia quello stesso in cui si disporrebbero in ordine decrescente i K nel punto iniziale, e non è quindi immediata la determinazione di tale ordine a priori; infatti, ora che K_h non dipende più soltanto da C_h, può darsi benissimo che l'ordine dei K_h secondo grandezza s'inverta nel corso del procedimento, e s'incontri prima un K_h di un K_j che inizialmente era maggiore. Per lo stesso motivo non sarà più vero che, entro ciascun tratto della spezzata, si debba procedere in *ugual proporzione* alla riassicurazione delle diverse polizze riassicurate: muovendosi infatti sulla retta intersezione di $K_1 = K_2 = \cdots = K_h$ con $C_{h+1} = \overline{C}_{h+1}$, $C_{h+2} = \overline{C}_{h+2}, \cdots, C_n = \overline{C}_n$ la relazione tra le C_j $(j \leq h)$ risulta bensì ancora lineare, ma non più omogenea. Ma la differenza veramente sostanziale nel risultato sta nella circostanza (corollario, in fondo, della precedente) che i pieni risultano *interdipendenti*, nel senso che il rapporto fra i pieni da applicare a due assicurazioni, che nel caso di non–correlazione dipendeva solo da elementi ad esse relativi (era infatti $A_j/A_h = \overline{\sigma}_j^2 \overline{k}_h / \overline{\sigma}_h^2 \overline{k}_j$), può ora invece venir modificato per la presenza di un terzo rischio o di più altri rischi, più o meno correlati con quelli. Appunto da tale circostanza deriva il fatto che, come si è visto, la determinazione dei pieni conduce in questo caso al problema laborioso, seppure in sè elementare, della risoluzione di un sistema di equazioni lineari.

6. *Casi particolari.* — Poichè la complicazione della soluzione esatta non consente – sembra – di trarre dalla sua discussione diretta delle conclusioni generali praticamente significative, converrà cercercar di mettere in luce qualche circostanza maggiormente interessante riferendosi ad ipotesi particolari particolarmente notevoli.

Consideriamo anzitutto il caso in cui le correlazioni siano piccolissime, o, precisando meglio, studiamo come si modifichino in prima approssimazione, per un dato valore di G, i pieni C_j^0 corrispondenti alla non-correlazione ($\delta \cdot r_{jh} = 0$) quando i coefficenti di correlazione si pongano eguali a $\delta \cdot r_{jh}$ (δ piccolo). Rammentiamo che dobbiamo avere

$$C_j^0 = \frac{A \bar{C}_j \bar{k}_j}{\bar{\sigma}_j^2} = \frac{A \bar{C}_j}{A_j}$$

per j minore o uguale a un certo h;

$$C_j^0 = \bar{C}_j \quad \text{per } j > h;$$

$$G = \bar{G} - \sum_{1}^{h}{}_j (\bar{C}_j - C_j^0) \bar{k}_j / \bar{C}_j .$$

Per δ abbastanza piccolo, la soluzione dovrà ancora trovarsi, per ragione di continuità, sulla faccia $C_j = \bar{C}_j$ ($j = h + 1, h + 2, \cdots, n$); i C_j ($j \leq h$) si determineranno invece dalle equazioni

$$K_1 = K_2 = \cdots = K_n ,$$

ossia

$$\frac{\bar{\sigma}_j}{\bar{C}_j} C_j + \delta \sum_{1}^{n}{}_i^{(j)} r_{ji} \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{C}_i} C_i = \frac{\bar{k}_j}{\bar{\sigma}_j} \times \text{costante},$$

la costante dovendosi determinare in modo da mantenere inalterato G, per il che dovrà essere

$$\sum_{1}^{h}{}_i (C_j - C_j^0) \bar{k}_j / \bar{C}_j = 0 .$$

Indicando con C_j' la derivata di C_j rispetto a δ per $\delta = 0$, avremo in prima approssimazione $C_j = C_j^0 + \delta C_j'$, e analogamente la costante si potrà scrivere $A + A' \delta$; avremo quindi

$$\frac{\bar{\sigma}_j}{\bar{C}_j} (C_j^0 - C_j' \delta) + \sum_{1}^{n}{}_i^{(j)} r_{ji} \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{C}_i} (C_i^0 + C_i' \delta) = \frac{\bar{k}_j}{\bar{\sigma}_j} (A + A' \delta),$$

da cui levando i termini indipendenti da δ che si annullano e trascurando i termini in δ^2 si ha

$$\frac{\bar{\sigma}_j}{\bar{C}_j} C_j' + \sum_{1}^{n}{}_i^{(j)} r_{ji} \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{C}_i} C_i^0 = A' \frac{\bar{k}_j}{\bar{\sigma}_j}$$

ossia

$$C_j' = \frac{\bar{C}_j}{\bar{\sigma}_j} \left[A' \frac{\bar{k}_j}{\bar{\sigma}_j} - \sum_{1}^{n}{}_i^{(j)} r_{ji} \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{C}_i} C_j^0 \right] = \frac{\bar{C}_j}{A_j} \left[A' - A \sum_{1}^{n}{}_i^{(j)} r_{ij} \frac{\bar{k}_i / \bar{\sigma}_i}{\bar{k}_j / \bar{\sigma}_j} \right].$$

La seconda condizione diviene $\sum_{1}^{h}{}_l \bar{k}_l . C'_l/\bar{C}_l = 0$, e da essa si ricava

$$\sum_{1}^{h}{}_l \left(\frac{\bar{k}_l}{\bar{\sigma}_l}\right)^2 \left[A' - A \sum_{1}^{n}{}_i^{(l)} r_{il} \frac{\bar{k}_i/\bar{\sigma}_i}{\bar{k}_l/\bar{\sigma}_l}\right] = 0$$

e quindi

$$A' = A \frac{\sum_{1}^{h}{}_l \left(\frac{\bar{k}_l}{\bar{\sigma}_l}\right)^2 \sum_{1}^{n}{}_i^{(l)} r_{il} \frac{\bar{k}_i/\bar{\sigma}_i}{\bar{k}_l/\bar{\sigma}_l}}{\sum_{1}^{h}{}_l \left(\frac{\bar{k}_l}{\bar{\sigma}_l}\right)^2};$$

sostituendo al posto di A' tale sua espressione si ottiene in definitiva per C'_j la formula

$$C'_j = \bar{C}_j . \frac{A}{A_j} \left[\frac{\sum_{1}^{h}{}_l \left(\frac{\bar{k}_l}{\bar{\sigma}_l}\right)^2 \sum_{1}^{n}{}_i^{(l)} r_{il} \frac{\bar{k}_i/\bar{\sigma}_i}{\bar{k}_l/\bar{\sigma}_l}}{\sum_{1}^{h}{}_l \left(\frac{\bar{k}_l}{\bar{\sigma}_l}\right)^2} - \sum_{1}^{n}{}_i^{(j)} r_{ij} \frac{\bar{k}_i/\bar{\sigma}_i}{\bar{k}_j/\bar{\sigma}_j}\right] =$$

$$= \bar{C}_j \frac{A}{A_j} \left[\frac{\sum_{1}^{h}{}_l \left(\frac{\bar{k}_l}{\bar{\sigma}_l}\right)^2 \rho_l}{\sum_{1}^{h}{}_l \left(\frac{\bar{k}_l}{\bar{\sigma}_l}\right)^2} - \rho_j\right] = C^\circ_j \left[\bar{\rho}_{(h)} - \rho_j\right]$$

ossia

$$C_j = C^\circ_j \left[1 - \delta \left(\bar{\rho}_{(h)} - \rho_j\right)\right]$$

ove si ponga

$$\rho_j = \sum_{1}^{n}{}_i^{(j)} r_{ij} \frac{\bar{k}_i/\bar{\sigma}_i}{\bar{k}_j/\bar{\sigma}_j},$$

e, poichè ρ_j rappresenta in un certo senso la misura complessiva della correlazione della j-esima assicurazione con tutte le rimanenti, e $\bar{\rho}_{(h)}$ è la media aritmetica ponderata (con pesi $(\bar{k}_j/\bar{\sigma}_j)^2$ dei ρ_j relativi alle h polizze riassicurate, si può enunciare il senso della formula ottenuta dicendo che l'effetto di una debole correlazione fra i rischi sulla determinazione dei pieni a parità di G consiste nel far diminuire il pieno per quelle fra le h assicurazioni riassicurate che hanno una correlazione complessiva con le altre superiori alla misura media, facendolo in compenso aumentare (in modo da conservare costante G) per le altre con correlazione complessiva inferiore a detta misura (che è, si badi, la misura media fra le sole h assicurazioni riassicurate, non la media per l'intero portafoglio).

Come secondo caso particolare consideriamo quello in cui le n assicurazioni si dividono in g gruppi $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_g$, fra due assicurazioni di uno stesso gruppo avendosi una correlazione positiva uguale per tutte le coppie di un gruppo dato, mentre assicurazioni di due gruppi diversi sono tra loro indipendenti (o almeno non correlate). Supporremo inoltre che per tutte le assicurazioni di un medesimo gruppo sia costante il rapporto $\bar{\sigma}_i/\bar{k}_i$. Scriveremo $2\,\bar{\sigma}_i/\bar{k}_i = a_m$, $r_{ij} = r_m$ se i e j appartengono al gruppo medesimo, mentre sarà $r_{ij} = 0$ se i e j appartengono a gruppi distinti.

Sarà in tale ipotesi

$$\sigma^2 = \sum_1^n {}_h\, \sigma_h^2 + \sum_1^g {}_m\, r_m \sum_{[m]}{}'_{ij}\, \sigma_i \sigma_j$$

e, se h appartiene al gruppo m,

$$k_h(C_1, C_2, \cdots, C_m) = 2\, C_h \frac{\bar{\sigma}_h^2}{\bar{C}_h \bar{k}_h} + 2\, r_m \sum_{[m]}{}_j^{(h)} C_j \frac{\bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_h}{\bar{C}_j \bar{k}_h} =$$

$$= 2\, r_m \sum_{[m]}{}_j C_j \frac{\bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_h}{\bar{C}_j \bar{C}_h} + 2\,(1 - r_m)\, C_h \frac{\bar{\sigma}_h^2}{\bar{C}_h \bar{k}_l} =$$

$$= a_m \left[r_m \sum_{[m]}{}_j C_j \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{C}_j} + (1 - r_m)\, C_h \cdot \frac{\bar{\sigma}_h}{\bar{C}_h} \right]$$

ove $\sum\limits_{[m]}, \sum\limits_{[m]}{}'$ indicano la $\sum$ estesa agli indici del gruppo m (coll'apice: senza ripetizione).

L'equazione $K_h = K_l$ assume le forme seguenti a seconda che h ed l appartengono a due gruppi distinti m ed s, o a uno stesso $m = s$.

Nel caso $m = s$ rimane semplicemente

$$C_h \frac{\bar{\sigma}_h}{\bar{C}_h} = C_l \frac{\bar{\sigma}_l}{\bar{C}_l} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{C_h}{\bar{C}_h} \frac{\bar{\sigma}_h^2}{\bar{k}_h} = \frac{C_l}{\bar{C}_l} \cdot \frac{\bar{\sigma}_l^2}{\bar{k}_l},$$

e cioè il rapporto fra i pieni è quello stesso che si avrebbe in assenza di correlazione. In particolare, se tutte le assicurazioni sono ugualmente correlate, e hanno un medesimo rapporto $\bar{\sigma}/\bar{k}$ (costituiscono in altre parole un unico gruppo nel senso indicato) i pieni non cambiano (cambia però, naturalmente, come vedremo ed è ovvio, il grado di sicurezza corrispondente a un dato livello dei pieni, o, in altre parole, il livello occorrente per giungere al voluto grado di sicurezza).

Per tutte le assicurazioni di un gruppo m avremo quindi $C_h = A^{(m)} \frac{\bar{C}_h}{A_h}$ oppure $C_h = \bar{C}_h$ se l'espressione precedente fosse maggiore di $\bar{C}_h$ dove $A^{(m)}$ è il fattore di proporzionalità (come A nel caso di non correlazione) relativo al gruppo.

Converrà indicare d'ora in poi le assicurazioni con due indici, che, evitando ogni spiegazione, ne individuino unicamente il gruppo e il posto: con $m, 1; m, 2; \cdots; m, n_m$, indicheremo le n_m assicurazioni del gruppo m in ordine decrescente di A_h; h_m il numero delle polizze riassicurate nel gruppo m, ossia il massimo h per cui $A_{m,h} > A^{(m)}$, cosicchè sarà

$$C_{m,h} = A^{(m)} \frac{\bar{C}_{m,h}}{A_{m,h}} \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \cdots, h_m,$$

$$C_{m,h} = \bar{C}_{m,h} \quad \text{per} \quad h = h_m + 1, \cdots, n_m.$$

Per risolvere completamente il problema basterà quindi determinare la relazione fra le costanti $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(g)}$ dei g gruppi, ciò che si otterrà uguagliando le K relative ad assicurazioni riassicurate di gruppi diversi. Dato che all'interno d'ogni gruppo le K sono già uguali per tutte le polizze riassicurate basterà uguagliare i $K_{m,1}$, (relativi alla prima polizza da riassicurare in ciascun gruppo) per tutti i gruppi per cui $h_m \neq 0$ (per cui cioè almeno una polizza va riassicurata). Abbiamo

$$K_{m,1} = a_m \left[r_m \left(A^{(m)} \sum_1^{h_m}{}_j \frac{\bar{\sigma}_{m,j}}{A_{m,j}} + \sum_{h_m+1}^{n_m}{}_j \bar{\sigma}_{m,j} \right) + 2(1 - r_m) \frac{A^{(m)}}{a_m} \right] =$$

$$= a_m r_m \sum_{h_m+1}^{n_m}{}_j \bar{\sigma}_{m,j} + A^{(m)} \left[a_m r_m \sum_1^{h_m}{}_j \frac{\bar{\sigma}_{m,j}}{A_{m,j}} + 2(1 - r_m) \right]$$

dove h_m è l'indice h per cui $A_{m,h} \geqq A^{(m)} \geqq A_{m,h+1}$; si vede che quando $A^{(m)}$ assume uno dei valori $A_{m,h}$, i due valori a destra e a sinistra coincidono, e abbiamo quindi

$$K_{m,1} = f_m(A^{(m)})$$

funzione continua di $A^{(m)}$, lineare nei tratti fra i valori $A^{(m)} = A_{m,h}$, nei quali si ha un'angolosità; la funzione è quindi rappresentata da una poligonale, e si vede che essa parte dall'origine ($f_m(0) = 0$), è crescente sempre, ed ha pendenza sempre minore da un tratto al successivo. Il tratto $A^{(m)} > A_{m,1}$ è privo di significato, e la poligonale si può quindi interrompere in corrispondenza a tale ascissa, cui corrisponde l'ordinata (massima)

$$\overline{K}_m = f_m(A_{m,1}) = a_m r_m \sum_1^{n_m}{}_j \bar{\sigma}_{m,j} + 2 A_{m,1}(1 - r_m) =$$

$$= 2\left[r_m \sum_1^{n_m}{}_j A_{m,j} + A_{m,1}(1 - r_m)\right] = 2\left[A_{m,1} + r_m \sum_2^{n_m}{}_j A_{m,j}\right];$$

supporremo d'avere ordinato i gruppi in modo che

$$\overline{K}_1 \geqq \overline{K}_2 \geqq \cdots \geqq \overline{K}_g .$$

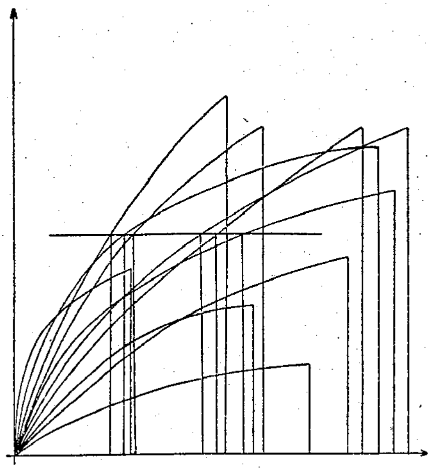

Fig. 2.

La soluzione completa del problema è allora immediata riferendoci alla rappresentazione grafica (Fig. 2): si traccino i diagrammi delle g funzioni

$$y = f_1(x)\,, y = f_2(x)\,, \cdots, y = f_g(x)$$

e si tracci un'orizzontale $y = \text{cost.}$; essa determinerà g valori $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots, x_g$ di x per cui $f_m(x_m) = y$ (esclusi quegli m per cui $\overline{K}_m < y$. Quelli così determinati sono i valori di $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(g)}$ che vanno simultaneamente applicati per ciascuno dei g gruppi.

E si vede che dapprima va riassicurata solo qualche polizza del gruppo 1, poi anche del gruppo 2, 3 ecc. nell'ordine delle $\overline{K}_m$ decrescenti.

In particolare, la prima polizza da riassicurare sarà quella per cui è massimo A_h, aumentato della somma di tutti gli A_h delle altre polizze dello stesso gruppo m moltiplicata per il coefficente di correlazione r_m.

7. *La correlazione e la stabilità.* — Nell'accennare, come caso particolare, a quello in cui l'intero portafoglio si riduca a un unico «gruppo» nel senso del numero precedente, si era avvertito che, pur rimanendo invariati – in quelle ipotesi – gli stessi pieni del caso di correlazione, varia il grado di stabilità corrispondente ad ogni livello dei pieni. Per esaminare ora la relazione che passa appunto fra la correlazione e la stabilità ci riferiremo ancora allo stesso caso particolare, che è il più adatto a darne una prima idea in forma semplice.

Avremo

$$\sigma^2 = \sum_1^n \sigma_j^2 + r \sum_{ij}{}'^{\,n}_{1} \sigma_i \sigma_j = (1-r) \sum_{j\,1}^{\;n} \sigma_j^2 + r \sum_{ij\,1}^{\;n} \sigma_i \sigma_j =$$

$$= (1-r)\, n \left[\sum_1^n \frac{\sigma_j^2}{n} \right] + r n^2 \left[\sum_{j\,1}^{\;n} \frac{\sigma_j}{n} \right]^2 ;$$

lo scarto quadratico medio è quindi sempre maggiore, per effetto di una correlazione positiva, che nel caso d'indipendenza, e diviene tanto più grande quanto più tale correlazione è forte; nell'ultima forma di scrittura abbiamo poi voluto mettere in evidenza che detta influenza è tanto più preponderante quanto maggiore è il numero delle assicurazioni. Essa mostra infatti che, mentre nel caso di rischi non correlati l'ordine di grandezza degli scarti cresceva come $\sqrt{n}$ (e quindi in misura relativa decresceva come $1/\sqrt{n}$) al crescere del numero delle assicurazioni (mantenendo intorno al medesimo livello l'ordine di grandezza medio dei σ_j), quando si abbia una correlazione positiva l'ordine di grandezza dello scarto assoluto cresce come n, e quindi in misura relativa non scende sotto un valore limite dato da

$$\sigma_{\text{med}} \sqrt{r}\,, \qquad \text{con} \qquad \sigma_{\text{med}} = \frac{1}{n} \sum \sigma_j\,.$$

Scrivendo σ^0 il valore di σ per $r = 0$, avremo $\sigma^2 = (1 - r)(\sigma^0)^2 + r(\sum \sigma_j)^2$, e, introducendo per $(\sigma^0_\cdot)^2$ l'espressione del n. 3 e osservando che $\sum_1^n{}_j \sigma_j = A \sum_1^h{}_j \bar{\sigma}_j + \sum_{h+1}^n \bar{\sigma}_j = AD_h + E_h$, abbiamo in funzione di A

$$\sigma^2 = (1 - r)(A^2 B_h + S_h) + r(AD_h + E_h)^2 =$$

$$= A^2 [rD_h^2 + (1 - r) B_h] + 2 ArD_h E_h + [rE_h^2 + (1 - r) S_h]$$

mentre G, come funzione di A, rimane naturalmente invariato

$$G = \bar{G}_h + AB_h .$$

Il rapporto $t = G/\sigma$ corrispondente a un dato valore di A (ossia di G) è dato dunque da

$$\frac{1}{t^2} = \frac{\sigma^2}{G^2} = (1 - r)\frac{A^2 B_h + S_h}{(\bar{G}_h + AB_h)^2} + r\left(\frac{AD_h + C_h}{\bar{G}_h + AB_h}\right)^2$$

anzichè da

$$\frac{1}{t^2} = \frac{(\sigma^0)^2}{G^2} = \frac{A^2 B_h + S_h}{(\bar{G}_h + AB_h)^2}$$

come nel caso di non–correlazione. Nel caso in cui il valore A e il valore A_0 che, sostituiti rispettivamente nella prima e seconda formula, portano a un medesimo dato valore di $1/t^2$, appartengono a un medesimo intervallo $A_{h+1} \leqq A < A_0 \leqq A_h$ (ciò che avverrà sempre se r è abbastanza piccolo ed A_0 non troppo vicino alla destra di un valore A_h), avremo A determinato in funzione di A_0 dall'equazione di secondo grado

$$(\bar{G}_h + AB_h)^2 (A_0^2 B_h + S_h) = (\bar{G}_h + A_0 B_h)^2 [A^2 (rD_h^2 + (1 - r) B_h) + $$
$$+ 2 ArD_h E_h + (rE_h^2 + (1 - r) S_h)] .$$

Ma ciò che interessa particolarmente stabilire è il senso in cui varia t al variare di A. Poniamoci senz'altro nel caso $\bar{G}_n > 0$ (che è da considerarsi normale; cfr. n. 3), in cui la $1/t^2$ del caso di non correlazione, ossia il primo termine della espressione di $1/t^2$ nel caso generale, è funzione sempre crescente di A; se anche il secondo termine, ossia $(AD_h + C_h)/(\bar{G}_h + AB_h)$, è crescente, possiamo concludere senz'altro che è crescente anche $1/t^2$ qualunque sia r e si riconosce

tosto che ciò avviene se è positivo (per h qualunque) $\overline{G}_h D_h - B_h E_h =$
$= \overline{G} D_h - \left(D_h \sum_{1}^{h}{}_j \bar{k}_j + B_h E_h\right)$, ossia se $\overline{G}$ è sufficentemente elevato; nel caso opposto, $1/t^2$ sarà comunque ancor sempre crescente finchè r sia abbastanza piccolo e prevalga quindi l'andamento del primo termine. Supposta verificata l'una o l'altra di queste due condizioni, e con ciò $1/t^2$ funzione crescente di A, risulta tosto che, nel caso di correlazione (positiva) occorre abbassare i pieni se si vuole evitare che $1/t^2$ cresca (ossia diminuisca il grado di sicurezza): tenendo fermo A, infatti, $1/t^2$ crescerebbe; per farlo diminuire ritornando al valore precedente bisogna diminuire A.

Le stesse conclusioni (salvo la maggiore complessità delle restrizioni precedenti per assicurare che $1/t^2$ sia funzione sempre crescente di A) valgono per il caso di un numero qualunque di gruppi, ed anche nel caso generale di correlazioni (positive) qualsiansi.

8. *Considerazioni sulla correlazione.* — L'estensione, che pur mi sembra si presenti così ovvia, delle considerazioni sul rischio al caso di eventi correlati tra loro, non è invece trattata quasi mai nelle ricerche sull'argomento (non mi ricordo, anzi, d'averla incontrata che in un lavoro del Dubois [9]). Forse la posizione preminente quando non addirittura esclusiva fatta nella maggior parte delle trattazioni di Calcolo delle probabilità al caso dell'indipendenza stocastica ha diffuso la sensazione che sia questo il caso « normale », all'infuori del quale non trovino posto che delle ipotesi artificiose e di dubbia applicabilità pratica; forse le critiche contro l'uso (che fu certo fatto spesso a sproposito) del coefficente di correlazione inducono a sfuggirlo anche dove il suo uso è appropriato e necessario; forse (e questo penso sia il motivo prevalente) il concetto di « dipendenza stocastica » (ossia: probabilistica) è interpretato generalmente in senso troppo letterale, come influenza diretta dell'esito di un evento sulle condizioni in cui l'altro si produce.

Per tutti questi motivi mi sembra non sia apparso in genere troppo chiaramente che le molte discussioni sulla validità della teoria del rischio, sulla legittimità dell'applicazione del Calcolo delle probabilità alle assicurazioni, sul carattere casuale o meno dei fenomeni, si riducono a quest'unica questione: se gli eventi considerati

---

9) Cfr. Bibliografia, Dubois, 1.

sono o non sono indipendenti, sono o non sono correlati. E quindi non si tratta di problemi pregiudiziali per l'applicabilità della teoria delle probabilità, ma semplicemente di un problema particolare riguardante la valutazione di certe probabilità che entrano in gioco. Ecco perchè estendere la trattazione al caso della correlazione significa, a mio parere, superare d'un sol colpo tutte le difficoltà pregiudiziali che vengono e possono venir sollevate nel senso suaccennato.

Quanto alla reale estensione del concetto di «dipendenza stocastica», osserviamo che, oltre al caso di una dipendenza diretta nel senso più ovvio della parola, si ha dipendenza se vi sono delle circostanze che possono influire simultaneamente sui diversi eventi, o anche semplicemente un'analogia fra gli eventi in forza della quale l'esperienza relativa agli uni si ripercuote sulla nostra opinione riguardo agli altri. Una dipendenza del primo tipo si ha, ad esempio, fra le probabilità d'incendio di stabili attigui; del secondo, fra le probabilità di sinistri marittimi, per effetto delle circostanze comuni relative allo stato del mare, alla nebbia, alle condizioni meteorologiche, ecc.; del terzo (che però ha minore attinenza col nostro argomento) danno un esempio tutti i rami all'inizio del loro sviluppo, perchè l'esperienza influisce, in modo particolarmente sensibile, man mano che si va formando, sulla probabilità che si attribuisce agli eventi assicurati [10]).

In tutti questi esempi la correlazione è positiva, ed anche nelle considerazioni introduttive alla trattazione del caso di rischi correlati si era considerata come tipica un'ipotesi che conduce ad una correlazione positiva; vogliamo ora mostrare brevemente che una correlazione sistematica tra eventi non può essere se non positiva, giustificando così l'aver limitato a tale caso (ogni qualvolta una simile restrizione fosse necessaria) la trattazione sviluppata. Una correlazione negativa fra due eventi significa che essi sono in un certo senso *opposti*, in un certo senso *prossimi* a due eventi *contrari* tra loro (negazione). Così una correlazione negativa si può avere fra assicurazioni per il caso di morte e assicurazioni per il caso di vita fra assicurazioni incendio e assicurazioni pioggia, perchè certe medesime circostanze (per esempio un'epidemia nel primo caso, un periodo

---

10) Tali considerazioni ho svolte più ampiamente in *Riflessioni teoriche sulle assicurazioni elementari* (Comun. Congr. Int. Attuari, Parigi, 1937) ed *Ai margini del dominio della matematica nei problemi dell'assicurazione* «Assicurazioni», A. V. nn. 4-5, 1938.

di siccità nel secondo) influiscono, ma in senso opposto, sui due tipi di assicurazioni. Ma è già intuitivo che, data una massa di assicurazioni, non è possibile che date circostanze abbiano un effetto « opposto » su tutte queste assicurazioni considerate due a due. E infatti l'imagine geometrica suggerita dalla parola « opposto » è perfettamente giustificata, anzi rigorosamente esatta: la formula per lo scarto quadratico medio di una somma di numeri aleatori mostra infatti in modo immediato che è possibile rappresentare sempre n numeri aleatori con altrettanti vettori (nello spazio a n dimensioni) aventi un modulo che ne rappresenti lo scarto quadratico medio e formanti a due a due un angolo di cui il coefficente di correlazione misuri il coseno (in grandezza e segno) [11]. Ora, n vettori possono benissimo essere ortogonali tra loro (caso di non correlazione), o formare angoli acuti (correlazione positiva), ma è impossibile che formino angoli tutti ottusi (oltre un certo angolo limite). Per esempio tre vettori possono formare tra loro al più angoli di 120^0, in generale n vettori al più angoli il cui coseno sia $-1/(n-1)$, e tale è pertanto il massimo coefficente di correlazione negativo che può aversi simultaneamente fra n numeri aleatori. Indipendentemente dalle considerazioni geometriche con cui è sembrato utile renderla intuitiva, tale constatazione si poteva fare direttamente sulla formula dello scarto quadratico medio osservando che non si può supporre inferiori a $-1/(n-1)$ tutti gli r_{jh} e neppure solo la loro media $\bar{r}$, altrimenti, per $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = 1$, lo scarto quadratico medio della somma, σ, risulterebbe immaginario:

$$\sigma^2 = n + \sum r_{jh} = n + n(n-1)\bar{r} < n - n(n-1)\frac{1}{n-1} = n - n = 0 .$$

Ancora una breve osservazione per rilevare il nesso fra le considerazioni ora svolte e la cosidetta teoria della dispersione. In essa si dicono fenomeni a dispersione normale, rispettivamente subnormale o supernormale, quelli per cui la variabilità della frequenza (in periodi successivi), misurata mediante la media quadratica degli scarti (« scarto quadratico medio osservato »), è uguale, minore o maggiore di quella prevista nelle ipotesi di indipendenza (scarto quadratico medio); si chiama « coefficente di dispersione » il rapporto Q tra variabilità osservata e teorica, cosicchè i tre casi corrispondono a

---

[11]) Per maggiori sviluppi in tale ordine d'idee vedasi la mia nota *A proposito di « correlazione »*, « Supplemento Statistico Nuovi Problemi », A. III, nn. 1-2, 1937.

$Q = 1$, $Q < 1$, $Q > 1$. Da quanto precede risulta che si deve attendere una dispersione subnormale o rispettivamente supernormale nel caso di eventi correlati tra loro negativamente o positivamente, e precisamente la speranza matematica di $Q^2 - 1$ è $\bar{r}(n-1) \simeq \bar{r}n$. Nel senso specificato i due indici e i due concetti di correlazione e di dispersione sono equivalenti, ma diversa ne è la portata; la correlazione esprime una caratteristica propria del fenomeno consentendo di basarci una teoria costruttiva, mentre il coefficente di dispersione non ha alcun significato costruttivo (non esprime nulla che sia insito nel fenomeno), ma ha in compenso il modo di mostrare, per un dato numero n delle prove di ciascun successivo «periodo», se appaia più o meno necessario attribuire le discordanze nell'ordine di grandezza della variabilità all'esistenza di una correlazione positiva o negativa, o se esse sono facilmente attribuibili all'effetto del caso mantenendo l'opinione che gli eventi siano indipendenti.

9. *Un problema ulteriore per le assicurazioni vita.* — Nel caso delle assicurazioni vita si pone un problema ulteriore in dipendenza del fatto che, come si è avvertito, l'applicazione diretta delle considerazioni finora svolte supporrebbe la riassicurazione anno per anno, mediante un premio di rischio, della parte di somma sotto rischio che eccedesse il pieno sopportabile su una singola testa. Il caso corrispondente all'attuale pratica delle compagnie d'assicurazione è invece quello della cessione di una certa parte di un'assicurazione fin dall'inizio di essa, in misura invariabile attraverso tutta la durata del contratto, cosicchè la parte di somma sotto rischio coperta direttamente dall'assicuratore diminuirà da un massimo iniziale fino ad annullarsi coll'approssimarsi della scadenza (nel caso comune di tariffe miste, termine fisso ecc.) o comunque avrà un certo andamento variabile dipendente dalla forma dell'assicurazione (dall'andamento del capitale pagabile in caso di morte – o, più in generale, del valore attuale all'istante della morte di tutte le prestazioni che ne derivano – e della riserva matematica); perciò non è possibile una determinazione del pieno che anno per anno corrisponda alle condizioni di «optimum» secondo la formulazione che ne abbiamo dato, e si potrà soltanto cercare di avvicinarsi ad esse «in media».

Per ricondurre il problema nell'àmbito dell'impostazione e della trattazione precedente, osserviamo che si tratta in sostanza di stabilire, anzichè il pieno per ciascun anno di assicurazione indipendentemente dagli altri, i pieni relativi al solo primo anno di assicurazione, restando tutti gli altri determinati da questo, moltiplicandolo per il rapporto delle somme sotto rischio. Meglio, per adottare la terminologia usuale, sarà da determinare il pieno C sul « capitale assicurato », cosicchè, dette $R_1, R_2, \cdots, R_n$ le somme sotto rischio nei successivi anni di assicurazione, l'adozione del pieno C condurrà a limitare a $CR_1, CR_2, \cdots, CR_n$ la somma sotto rischio nel corso della durata contrattuale. Nel portafoglio esistente in un dato istante avremo in genere numerose polizze aventi le stesse caratteristiche (tariffa, età iniziale, durata) ma differenti tra loro per la durata trascorsa; ponendo il problema di « optimum » come al n. 1, però col vincolo che per tutte le assicurazioni che differiscono tra loro solo per la durata trascorsa i pieni sull'attuale somma sotto rischio debbono rispettare la proporzionalità secondo la scala $R_1, R_2, \cdots, R_n$, si trova in qual modo sarebbe stato opportuno fissare inizialmente i pieni sui capitali assicurati onde render minimo, compatibilmente col sistema usuale di riassicurazione, il rischio per l'esercizio considerato. Poichè quella che occorre è una norma generale (in questo caso una tale conclusione relativa all'esercizio in corso non avrebbe che un valore retrospettivo, non potendosi per ipotesi modificare la misura della riassicurazione stabilita fin dall'inizio), bisognerà naturalmente supporre che la composizione del portafoglio a seconda della durata trascorsa rimanga pressochè costante.

Matematicamente, l'impostazione del problema di « optimum » sarà, in un certo senso, la stessa del caso precedente ove si consideri come un'unica assicurazione tutto il complesso delle assicurazioni simili (nel senso specificato poc'anzi), e cioè il rapporto

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial C} : \frac{\partial G}{\partial C}$$

dovrà essere uguale per tutti i diversi gruppi di assicurazioni simili; si ha però naturalmente una maggiore complicazione per il fatto che vi saranno, in ogni gruppo, polizze di diversa entità, sicchè la riduzione del pieno C non ha più un effetto semplicemente proporzionale.

Conviene forse scrivere le considerazioni seguenti riferendoci al caso ideale di una distribuzione continua: parlando sempre di un unico gruppo di assicurazioni simili, indichiamo con $\varphi_t(s)\,ds$ il numero delle assicurazioni di durata trascorsa t e capitale compreso tra s ed $s + ds$; con σ_t indichiamo poi lo scarto quadratico medio per unità di somma sotto rischio nell'anno t-esimo, e quindi con $R_t \sigma_t$ lo stesso per unità di capitale; infine con k indichiamo la perdita annua derivante dalla riassicurazione di un capitale unitario. A proposito di quest'ultimo elemento, osserviamo incidentalmente che la ripartizione di tale importo fra i successivi esercizi ha significato alquanto convenzionale e comunque estraneo al problema, perchè la formula risolutiva stessa mostrerà che, anche a voler considerare dei k variabili con t, si potrebbe sostituire ad essi la media aritmetica (con pesi opportuni); perciò considereremo senz'altro k costante (ripartizione uniforme fra i diversi esercizi).

Lo scarto quadratico medio σ e il margine di guadagno G per il nostro gruppo di assicurazioni simili (il primo, solo nell'ipotesi dell'indipendenza fra i rischi), sono dati da

$$\sigma^2(C) = \sum\nolimits_t R_t^2 \sigma_t^2 \left\{ \int_0^C s^2 \varphi(s)\, ds + C^2 \int_C^\infty \varphi(s)\, ds \right\}$$

$$G(C) = \bar{G} - k \sum\nolimits_t \int_C^\infty (s - C)\, \varphi(s)\, ds\,;$$

derivando

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial C} = \sum\nolimits_t R_t^2 \sigma_t^2 \left\{ C^2 \varphi_t(C) - C^2 \varphi_t(C) + 2C \int_C^\infty \varphi_t(s)\, ds \right\} =$$

$$= 2C \sum\nolimits_t R_t^2 \sigma_t^2 \int_C^\infty \varphi_t(s)\, ds$$

$$\frac{\partial G}{\partial C} = k \sum\nolimits_t \int_C^\infty \varphi(s)\, ds\,,$$

e quindi

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial C} : \frac{\partial G}{\partial C} = 2C \frac{\sum_t R_t^2 \sigma_t^2 \int_C^\infty \varphi_t(s)\, ds}{k \sum_t \int_C^\infty \varphi_t(s)\, ds} = 2C \frac{\bar{\sigma}^2}{k}$$

ove con $\tilde{\sigma}$ si indichi la media quadratica dei prodotti $R_t \sigma_t$ coi pesi $\int_C^\infty \varphi_t(s)\, ds$. I pesi, come si vede, dipendono in generale da C; ne sono indipendenti nel caso in cui $\varphi_t(s) = \nu_t \cdot \varphi(s)$ nel qual caso si riducono a ν_t: tale relazione dovrebb'essere praticamente verificata quando si ritengano uguali le probabilità di storno per polizze con grande o piccolo capitale assicurato.

Uguagliando a una costante $2A$ il rapporto delle derivate relativo a tutti i gruppi d'assicurazioni simili, otteniamo per i pieni la relazione

$$C = A \frac{k}{\tilde{\sigma}^2}$$

che è perfettamente uguale a quella del n. 3, salvo che il rapporto $k/\tilde{\sigma}^2$ – e quindi i pieni – sono una media – e precisamente la media armonica – fra quelli corrispondenti a ciascuna polizza del gruppo. Esplicitamente, se un gruppo di polizze simili è costituito dalle m assicurazioni $i_1, i_2, \cdots, i_m$, e ad esse corrispondessero i pieni dati dalla formula $C_{i_h} = A/A_{i_h}$, C sarebbe dato da

$$C = A : \frac{\sum \nu_{i_h} A_{i_h}}{\sum \nu_{i_h}} = \frac{\sum \nu_{i_h}}{\sum \nu_{i_h}/C_{i_h}},$$

purchè tutti i pieni s'intendano espressi per unità di capitale assicurato (non di somma sotto rischio).

Analogamente si estendono al presente caso le considerazioni relative all'ipotesi di correlazione.

10. *Il problema simultaneo per più assicuratori.* — Se consideriamo parecchi assicuratori in relazioni di riassicurazione tra loro, e ciascuno di questi si regola nella determinazione dei pieni sulla base dei risultati precedenti, ossia cercando ciascuno per proprio conto la situazione egoisticamente più vantaggiosa, non è detto però che lo scopo abbia a venire effettivamente raggiunto [12]. Cer-

---

[12] Quest'affermazione si riallaccia come caso particolare alle mie precedenti considerazioni intese a confutare il principio fondamentale dell'economia liberista secondo la quale il libero gioco dei singoli egoismi avrebbe per risultato un «optimum» collettivo (cfr. *Il tragico sofisma* «Riv. It. Sc. Econ.», A. VII, n. 3,

chiamo ora perciò di vedere se, affrontando il problema simultaneamente anzichè isolatamente, e basando sulle conclusioni di tale studio una convenzione reciproca anzichè altrettante decisioni unilaterali, non sia possibile stabilire un criterio diverso, per tutti e per ciascuno più vantaggioso del precedente.

Prescindendo dalle spese di riassicurazione (e cioè dalle maggiori spese di gestione che una polizza comporta in quanto riassicurata), risulta pressochè ovvio che l'«optimum» si avrebbe quando tutti gli assicuratori si ripartissero in una data proporzione tutte le assicurazioni, indifferentemente da quale siano assunte, funzionando così come un unico consorzio. Infatti tutti i ragionamenti precedenti, in cui alla preoccupazione di render piccolo il rischio si oppone la preoccupazione antagonista di mantener piccola la parte di guadagno ceduta mediante riassicurazione, cessano di aver senso non appena tale parte di guadagno appaia non perduta ma scambiata con altrettanto guadagno portato da un «controalimento» contrattualmente corrispondente. Rimane allora soltanto la questione di render minimo il rischio, e tale condizione è sodisfatta nelle situazioni in cui non è possibile, fra una qualunque coppia di assicuratori, lo scambio di due quote di rischio (senza implicare variazioni nel guadagno) in modo da diminuire il rischio per entrambi. Ciò equivale a richiedere la proporzionalità del «rischio marginale» (come si potrebbe dire, con locuzione che si spiega da sè) di tutte le assicurazioni per tutti gli assicuratori, e quindi, dato che il rischio è una funzione omogenea, la proporzionalità di tutti i rischi fra tutti gli assicuratori.

Il problema si complica enormemente se si cerca di discutere adeguatamente la questione delle spese di riassicurazione. Rimane comunque stabilito e fisso che il rapporto fra le quote degli assicuratori che partecipano a diversi rischi dev'essere per tutti questi rischi il medesimo: si dovranno cioè avere delle costanti $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s = 1$ tali che i rischi ripartiti fra tutti gli s assicuratori lo siano nelle percentuali $\lambda_1 \cdots \lambda_s$ mentre un rischio ripartito fra alcuni di essi $i_1, i_2, \cdots, i_r$ lo sia nelle percentuali $\lambda_{i_1}/\lambda, \lambda_{i_2}/\lambda, \cdots, \lambda_{i_r}/\lambda$ con $\lambda = \sum \lambda_{i_h}$. Ma quello che è difficile analizzare bene (e che, dopo di ciò, costituisce l'unica questione ancora aperta) è come si abbia a stabilire quanti e quali assicuratori convenga far partecipare a un

1935, e *Compiti e problemi dell'economia pura*, «G. I. I. A.», A. VII, n. 3, 1936). La seguente dimostrazione di tale affermazione costituisce quindi un esempio concreto a chiarimento e sostegno di quel punto di vista.

singolo rischio. Sembra però generalmente ammissibile l'ipotesi più semplice, che, cioè, scartando tutte le modalità intermedie, convenga in tutti i casi o ripartire un rischio fra tutti gli assicuratori considerati, o tenerlo tutto per proprio conto. Infatti la spesa di gestione più notevole è quella di chi cede il rischio, e se è vero che essa aumenta un po' al crescere del numero dei riassicuratori fra cui il rischio è ripartito, essa aumenterebbe ben più richiedendo uno speciale esame e una speciale scelta dei riassicuratori per ogni polizza, e rinunciando con ciò all'uniformità semplificatrice che contraddistingue il sistema considerato.

CAPITOLO SECONDO

Il problema secondo la teoria del rischio classica.

11. *L'impostazione precedente e punti di vista più generali.* — Nel primo capitolo abbiamo studiato il problema nell'àmbito di un solo esercizio, e l'obiezione che si può e deve fare è appunto questa: se e fino a qual punto sia sensato e giustificato impostarlo così, nell'àmbito di un solo esercizio. Dopo un esercizio ne comincia un altro, e poco varrebbe aver scongiurato il fallimento nel primo se esso non dovesse perciò che esser differito al secondo.

Considerandolo sotto questo aspetto il problema cambia fondamentalmente natura; esso non dipende più infatti dai soli dati e concetti finora nominati, ma, in più, da due distinti ordini di circostanze relative agli esercizi futuri: l'andamento futuro del fondo di garanzia G e lo sviluppo futuro delle assicurazioni.

Per quanto riguarda il fondo di garanzia, bisogna ancora aggiungere quali norme siano fissate (se si tratta di norme statutarie) o si può presumere verranno seguìte (se si tratta di norme consuetudinarie) per alimentarlo; è ovviamente ben diversa la risposta al problema se tutto l'utile venisse anno per anno accantonato ad aumentare tale fondo di garanzia, o, per passare senz'altro all'estremo opposto, se ogni utile fosse immediatamente consumato, senza dar luogo ad alcun vero e proprio accantonamento di un fondo per far fronte a scarti sfavorevoli. Note che siano le norme che regolano l'alimentazione del fondo e i prelevamenti da esso, ossia il suo incremento – positivo o negativo – in dipendenza del risultato di ciascun esercizio, il problema si può prospettare sotto il suo aspetto teoricamente più completo, e cioè come lo studio dell'andamento di tale fondo e della probabilità che esso abbia ad esaurirsi entro un termine più o meno prossimo.

Si giunge così ad un problema che sarà trattato nel terzo capitolo, e che costituisce in generale la teoria dei fondi di garanzia, applicabile ad ogni sorta di imprese anche all'infuori delle assicurazioni e, quindi, indipendentemente dalla teoria dei pieni.

Ma un'altra circostanza si deve supporre nota perchè il problema così impostato lo sia effettivamente, determinatamente, e non solo come generico schema. Dobbiamo supporre noto anche il secondo dei due nominati elementi, e cioè lo sviluppo futuro delle assicurazioni in relazione al quale si vuole esaminare le possibilità di esaurimento del fondo di garanzia. Non è il momento di fare su tale punto osservazioni in generale; lo scopo del presente capitolo è quello di riassumere criticamente la teoria del rischio che potremmo ben dire classica, e perciò di riferirci particolarmente all'ipotesi che le sta a base: la considerazione del solo portafoglio attuale, da seguire fino alla naturale estinzione.

Si potrà condannare come tendenzioso questo modo di venire a parlare dell'impostazione classica, inquadrandola nella precedente visione generale, in quanto può sembrare che si voglia in tal modo far dire a tale teoria che essa presuppone l'ipotesi assurda che la nuova produzione abbia a cessare di colpo; prevengo l'obbiezione ammettendo e avvertendo che non è, naturalmente, così. La teoria classica ritiene non che la produzione cessi, ma che il confronto tra il rischio di scarti sfavorevoli e i mezzi per fronteggiarlo vada fatto con riguardo agli impegni già effettivamente assunti, e non ipotecando proventi o preoccupandosi di rischi ancora di là da venire. Ciò dovevo dire perchè altrimenti avrei risposto al problema prima di porlo e avrei lasciato pensare d'aver dato quella risposta senza averlo visto nella sua vera luce; dopo fatta quest'ammissione, non mi si potrà però negare il diritto di sostenere l'opinione conforme a quella stessa risposta.

Se l'idea di prendere in considerazione le assicurazioni già stipulate ed esse sole può apparire, in base alla precedente frase giustificativa, fondata e quasi ovvia, non bisogna esimersi dal riflettere se al contenuto per dir così «giuridico» di quella frase corrisponda un qualche elemento intrinseco del problema che faccia pertanto corrispondere alla conseguente impostazione e soluzione un significato veramente concreto. E ciò non mi sembra sia il caso. Se infatti ci si vuol preoccupare anche del pericolo di fallimento in un'epoca meno prossima, e nel far ciò si tiene conto solo del rischio proveniente dalle polizze già stipulate e che a quel tempo potrebbero ancora essere in vigore, si considera solo una parte del futuro rischio, che non è affatto differenziata dal resto in modo così netto come forse sembra a prima vista. Infatti un'assicurazione già stipulata potrà prima d'allora esser già stata rescissa (stornata, riscattata, oppure ridotta), e se sarà in vigore non saremmo neppure obbligati a sopportarne il rischio se a quel momento, tenuto conto della situazione dell'intero portafoglio a quell'istante, e cioè comprese anche le assicurazioni che verranno stipulate nel frattempo) non sembrerà opportuno, perchè si potrà al caso riassicurarlo allora ulteriormente; d'altro canto, anche per riguardo al portafoglio già costituito, non basterebbe preoccuparsi del saldo definitivo, all'estinzione dell'ultima assicurazione, tra fondo di garanzia esistente, margini di utile futuri, guadagni e perdite derivanti dagli scarti futuri, dato che l'esaurirsi del fondo in un istante intermedio provocherebbe il fallimento indipendentemente dal fatto (allora non ancor conoscibile) che, se si proseguissero le operazioni fino alla loro estinzione, la situazione di perdita permanesse definitivamente o avesse a sanarsi.

Vedremo in base al teorema di Hattendorff, cui dedicheremo i prossimi nn. 12 e 13, un'illustrazione più matematicamente precisa di tali considerazioni; per il momento aggiungiamo ancora una considerazione esemplificativa, tale però da chiarire la sostanza della questione. Consideriamo un'assicurazione di puro rischio, a premio naturale. La si potrà stipulare per un periodo pluriennale, oppure rinnovare di anno in anno, e la differenza fra i due casi si restringe a circostanze accessorie estranee all'impostazione del nostro problema, eccetto una, che vi ha importanza, ma che è in compenso assai vaga: la presumibile maggiore probabilità che un assicurato abbia intenzione di tenere in vigore la polizza nel prossimo anno se ha stipulato un contratto pluriennale. Una mera e discutibile differenza quantitativa, che non giova a giustificare la conclusione classica che ai pratici appare (e in ciò concordo con questi) paradossale: che – *ceteris paribus* – una compagnia che si dedichi a tale forma di assicurazioni debba fissare i suoi pieni a un livello tanto più basso quanto maggiore è la proporzione dei contratti stipulati in forma pluriennale anzichè annuale.

12. *Il teorema di Hattendorff per una singola polizza.* — La teoria del rischio classica ci conduce ad esaminare, per ogni assicura-

zione, la distribuzione di probabilità del valore attuale delle prestazioni future corrispondente ai diversi casi possibili (o almeno lo scarto quadratico medio di tale distribuzione). Per fare un esempio (al quale ci riferiremo per l'opportunità di fissare le idee, ma, come sarà chiaro, senza restringere la validità dei ragionamenti) consideriamo un'assicurazione vita intera stipulata all'età x (premio puro, quindi, P_x) e in vigore da t anni. I casi possibili sono che l'assicurato viva ancora un anno, due anni, $\cdots$, h anni (conteremo per un anno la frazione cominciata, supponendo per semplicità i capitali pagabili a fine d'anno; analogamente supporremo i premi pagabili in rate annuali); corrispondentemente il valore attuale U_t delle prestazioni future può assumere i valori

$$U_{t,h} = V_{x,t} + P_x \, \mathrm{a}_{\overline{h}|} - v^h$$

ove $V_{x,t}$ è la riserva esistente, $\mathrm{a}_{\overline{h}|}$ la rendita certa per h anni e quindi $P_x \, \mathrm{a}_{\overline{h}|}$ il valore attuale di tutti i premi che verranno incassati, e infine v^h (fattore di sconto per h anni) il valore attuale del capitale che sarà pagato alla morte. $U_{t,h}$ rappresenta pertanto l'utile (perdita se negativo) che l'assicurazione a premio puro (prescindendo cioè dall'utile derivante dai caricamenti) produce nell'ipotesi del decesso nell'h-esimo anno da ora; è ovvio, per la definizione stessa della riserva matematica, che la speranza matematica di U_t è nulla; del resto basta osservare che

$$\mathfrak{M}(\mathrm{a}_{\overline{h}|}) = \mathrm{a}_{x+t}, \quad \mathfrak{M}(v^h) = A_{x+t},$$
$$\mathfrak{M}(U_t) = V_{x,t} + P_x \, \mathrm{a}_{x+t} - A_{x+t} = V_{x,t} - V_{x,t} = 0 .$$

Per ricollegare il presente al precedente ordine di considerazioni non avremo che ad esprimere U_t scomponendolo nella parte proveniente da ogni singolo esercizio; il guadagno $U_{(t)}$ nell'esercizio immediatamente successivo all'istante t sarà: in caso di vita fra un anno,
$U'_{(t)} = V_{x,t} + P_x - vV_{x,t+1} = P_t^{(r)} =$ « premio di rischio del t^{mo} anno »; mentre in caso di morte entro l'anno:

$$U''_{(t)} = V_{x,t} + P_x - v = -v(1 - V_{x,t+1}) + P_t^{(r)} = P_t^{(r)} - S_t^{(r)}$$

$$(S_t^{(r)} = \text{« somma sotto rischio » del } t^{mo} \text{ anno}).$$

Anche $U_{(t)}$, come si vede subito, ha speranza matematica nulla. Sia pensando al significato dei termini, sia constatandolo materialmente sulle espressioni precedenti, risulta subito che il valore di U_t relativo all'ipotesi che il decesso si verifichi nell'anno h^{mo} è

$$U_t = U'_{(t)} + vU'_{(t+1)} + v^2 U'_{(t+2)} + \cdots + v^{h-2} U'_{(t+h-2)} + v^{h-1} U''_{(t+h-1)}$$

ossia il numero aleatorio U_t si esprime mediante i numeri aleatori $U_{(t+h)}$ scrivendo in generale

$$U_t = U_{(t)} + vE_1 U_{(t+1)} + v^2 E_2 U_{(t+2)} + \cdots + v^h E_h U_{(t+h)} + \cdots$$

ove si indichi con E_h il numero aleatorio che prende i valori uno o zero a seconda che l'assicurato sarà in vita o sarà premorto al tempo h (da ora; quindi all'epoca $t+h$ dall'inizio, ossia all'età $x+t+h$). Si noterà che la speranza matematica di E_h non è che la probabilità di sopravvivenza dopo h anni, ossia $p_{x+t,h} = l_{x+t+h}/l_{x+t}$.

Quello che interessa determinare è ora lo scarto quadratico medio di U_t espresso in funzione di quello degli $U_{(t+h)}$, e il teorema di Hattendorff dà appunto tale espressione, che appare come una applicazione della formula che dà lo scarto quadratico medio di una somma di numeri aleatori non correlati [13]. Esso dice infatti che

$$\sigma^2(U_t) = \sum_0^\infty {}_h p_{x+t,h}\, v^{2h} \sigma^2(U_{(t+h)}) =$$

$$= \sum_0^\infty {}_h p_{x+t,h}\, v^{2h} p_{x+t+h}\, q_{x+t+h} (S^{(r)}_{t+h})^2 ,$$

e la dimostrazione si rende naturale esprimendola sotto la forma di ovvia applicazione della formula ricordata. Eseguendo il quadrato di U_t si hanno i termini quadrati $v^{2h} E_h^2 U^2_{(t+h)} = v^{2h} E_h U^2_{(t+h)}$ (perchè è sempre $E_h^2 = E_h$ essendo E_h eguale a zero oppure a uno), la cui speranza matematica è $v^{2h} p_{x+t,h}\, \sigma^2(U_{(t+h)})$, e i termini rettangoli $v^{h+k} E_h E_k U_{(t+h)} U_{(t+k)}$; si tratta di dimostrare che la speranza matematica di tali termini rettangoli è nulla, ossia che i numeri aleatori $E_h U_{(t+h)}$ sono non-correlati. E infatti (supposto $h<k$) tanto subordinatamente all'ipotesi $E_h = 0$ che a quella opposta $E_h = 1$ la speranza matematica del prodotto è nulla: nel primo caso perchè esso stesso è identicamente nullo, nel secondo perchè

[13] Tale concezione probabilistica del teorema di Hattendorff – fino allora ricavato materialmente da trasformazioni di particolari formule attuariali – è dovuta al Cantelli (Cfr. Bibliografia, 3, 4).

$U_{(t+h)}$ ha un valore univocamente determinato e, subordinatamente ad esso, $\mathfrak{M}(U_{(t+k)}) = 0$.

Per chiarire il risultato in un caso ancor più semplice all'infuori del campo e del formalismo attuariale, supponiamo di scommettere n volte di seguito un medesimo importo unitario sull'esito di un certo fenomeno in n prove indipendenti con probabilità p, arrestandosi però dopo la prima vincita. A seconda che la vincita si realizza al primo, secondo, terzo, $\cdots$, h^{mo}, $\cdots$, n^{mo} colpo oppure mai, il guadagno è (scrivendo al solito $q = 1 - p$) rispettivamente $1 - p$, $1 - 2p$, $1 - 3p$, $\cdots$, $1 - hp$, $\cdots$, $1 - np$, $-np$ e le probabilità di questi $n + 1$ casi sono rispettivamente p, pq, pq^2, $\cdots$, pq^{h-1}, $\cdots$, pq^{n-1}, q^n, sicchè il quadrato dello scarto quadratico medio del guadagno sarà

$$\sum_1^n{}_h (1-hp)^2 pq^{h-1} + n^2p^2q^n = p\left\{\sum_1^n{}_h q^{h-1}[hq-(h-1)]^2 + n^2q^n(1-q)\right\} =$$

$$= p\left\{\sum_1^n{}_h q^{h+1}h^2 - \sum_1^n{}_h q^h\, 2h(h-1)^2 + \sum_1^n{}_h q^{h-1}(h-1) + n^2q^n - n^2q^{n+1}\right\} =$$

$$= p\left\{\sum_2^{n+1}{}_h q^h(h-1)^2 - \sum_1^n q^h\, 2h\,(h-1) + \sum_0^{n-1} q^h h^2 + n^2q^n - n^2q^{n+1}\right\} =$$

$$= p\left\{\sum_2^{n-1}{}_h q^h + q^n + q\right\} = p\sum_1^n q^n = p\,\frac{q-q^{n+1}}{1-q} = q - q^{n+1}.$$

E infatti il quadrato dello scarto quadratico medio per ogni prova è pq, la probabilità di giocare l'h^{mo} colpo è q^{h-1}, sicchè il teorema di Hattendorff dava immediatamente l'espressione

$$pq\,[1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}] = q - q^{n+1}, \qquad \text{c. d. d.}$$

13. *Il teorema di Hattendorff per un intero portafoglio.* — Se consideriamo un certo insieme di assicurazioni durante un certo numero di esercizi, il valore attuale U dell'utile (nel medesimo senso) è, analogamente, un numero aleatorio i cui valori possibili corrispondono a tutte le diverse ipotesi sull'epoca dei decessi di tutti gli individui. Se non esiste correlazione, il quadrato dello scarto quadratico medio di U è la somma dell'analoga grandezza per ciascuna assicurazione, e, esprimendo queste mediante il teorema di Hattendorff, e raggruppando i termini relativi al medesimo anno, si vede che $\sigma^2(U)$ si può

scrivere ancora sotto una forma analoga alla precedente formula di Hattendorff, come somma cioè di termini riferentisi ciascuno a uno degli esercizi futuri. Per chiarirne il significato, basta osservare che, nel caso di una singola polizza, il termine $p_{x+t,h}v^{2h}\sigma^2(U_{(t+h)})$ si può considerare come la speranza matematica del quadrato del valore attuale dello scarto quadratico medio nell'anno h–esimo considerando tale grandezza quale è definita all'inizio di tale anno h–esimo (e cioè nulla se l'individuo è premorto, e uguale a $v^h \sigma (U_{(t+h)})$ se è in vita). Perciò (per la proprietà additiva della speranza matematica) anche per un intero portafoglio vale lo stesso significato: il termine relativo all'anno h–esimo è la speranza matematica del quadrato del valore attuale dello scarto quadratico medio per l'intero portafoglio nell'anno h–esimo, considerando tale grandezza quale è definita all'inizio del detto anno h–esimo. In termini più espliciti: si considerino tutte le diverse possibili composizioni del portafoglio all'inizio dell'h–esimo anno, per ciascuna di esse si determini quello che si valuterebbe in quell'istante come scarto quadratico medio, e il quadrato di tale grandezza si moltiplichi per la probabilità (attuale) della corrispondente composizione del portafoglio; la somma, moltiplicata per v^{2h}, è il termine cercato.

Sotto tale forma la validità del risultato è generale, e non legata al teorema del precedente n. 12 da cui l'abbiamo dedotta. Vediamo successivamente diverse restrizioni da cui ci si può liberare.

Una anzitutto che si riferisce anche al caso di un'assicurazione singola, e si ricollega a un'osservazione critica già fatta: il fattore $p_{x+t,h}$ rappresenta la probabilità che l'assicurato sia in vita fra h anni, mentre per il significato del problema dovrebbe intervenire la probabilità che sia in vigore l'assicurazione, il che è diverso. Per un'assicurazione già stipulata, tale probabilità non è $p_{x+t,h}$ ma inferiore, per la possibilità di una rescissione del contratto prima dell'epoca; se poi si considera (caso questo di solito non contemplato) un individuo non assicurato, la probabilità che lo sia tra h anni non è nulla, e non lo è quindi neppure il rischio corrispondente.

Se, passando al caso di un intero portafoglio, si abbandona la limitazione di restringersi alle polizze già stipulate, viene però a cadere (salvo ipotesi alquanto artificiose [14]) anche la possibilità di

---

14) Nel caso di polizze popolari con importi fissi e cumulo limitato, si potrebbe parlare di polizze « determinate » anche riferendosi a quelle non ancora stipulate, data la limitatezza delle possibili combinazioni.

riferirsi a polizze « determinate », perchè le nuove polizze potranno riguardare qualsiasi individuo e avere una qualunque somma assicurata (e qualunque può essere la tariffa). Anche in tale condizione permane però il significato del termine h-esimo come speranza matematica del solito numero aleatorio.

E ciò vale anche in un caso ancor più lontano dalle ipotesi precedenti, e cioè se i rischi di un medesimo anno si suppongono correlati (se, cioè, ci si pone nelle condizioni supposte al n. 5 e sgg.); benchè non sia più ottenibile addizionando l'espressione data per ogni singola polizza dal teorema di Hattendorff, l'espressione generale conserva il suo significato e la sua validità. Naturalmente, per il calcolo dello scarto quadratico medio quale si valuterebbe all'inizio dell'h-esimo anno corrispondentemente a ciascuna delle diverse possibili composizioni del portafoglio, sarebbe da applicare la formula del n. 5 (coi termini rettangoli).

Per questi ultimi due casi è però necessaria una dimostrazione diretta *ex novo*, dato che la precedente non vi si adatta. Si può però seguire la medesima falsariga: si deve supporre che il risultato degli esercizi precedenti possa avere influenza sulla composizione del portafoglio in un successivo esercizio (per es. in quanto gli individui già morti non potranno più figurarvi fra gli assicurati), ma non influire sul nostro giudizio nel senso di farci apparire non più eque, subordinatamente a tali risultati, le condizioni alle quali i rischi che già saranno stati assunti per l'anno in questione dovranno venire coperti. Allora lo scarto (guadagno o perdita) relativo a un anno generico ha speranza matematica nulla subordinatamente a qualsivoglia ipotesi concernente i risultati dei precedenti esercizi, e nulla quindi è la speranza matematica del prodotto degli scarti di due esercizi qualunque. Tali scarti sono pertanto non-correlati, e ciò basta a stabilire l'applicabilità, per la somma dei relativi valori scontati, della formula di Hattendorff.

Bisogna far attenzione al significato dell'ipotesi che occorre: possono essere tra loro correlati i rischi di un medesimo esercizio, ma non quelli di esercizi diversi (che possono tuttavia non essere indipendenti).

14. *I « pieni relativi ».* — Nella copiosissima letteratura che tratta la teoria del rischio nell'àmbito di quello che ho chiamato punto di vista classico, vi è sì grande varietà di atteggiamenti o almeno di sfumature nel concepire, impostare e risolvere il problema, che occor-

rerebbe non solo molto spazio e tempo per riferire su di essi sia pur succintamente, ma anche una grande abilità nello scoprire e seguire una traccia che consenta di coordinare e illustrare logicamente le diverse faccie del problema e confrontare la posizione dei diversi autori riguardo a ciascuna di esse, senza perdere troppo con ciò la visione unitaria dell'atteggiamento e dei contributi di ciascuno di essi. Un simile còmpito, di natura più che altro storico–critica, esorbiterebbe del resto dagli scopi del presente studio, cosicchè ci si potrà limitare a pochi cenni per fissare la relazione di varie questioni col problema del rischio quale qui è tratteggiato e impostato.

Il problema dei pieni relativi non viene ad avere una soluzione sostanzialmente differente considerando il rischio relativo a tutta la durata dell'assicurazione anzichè per un solo esercizio, e si ritrova precisamente (in sostanza) la soluzione del n. 9. Si dovrebbe infatti uguagliare, per tutte le assicurazioni o almeno per tutte quelle per cui esso supera un certo limite, il rapporto σ^2/k, σ e k rappresentando lo scarto quadratico medio ed il margine di guadagno per tutta la durata dell'assicurazione. Il teorema di Hattendorff mostra che tale rapporto è quello stesso del n. 9, e cioè una media ponderata degli analoghi rapporti relativi ai singoli esercizi, colla sola differenza che la media si fa ora sui valori scontati. Tale differenza si spiega da sè per la diversa impostazione: in quella attuale si suppone di porsi il problema per un gruppo di nuove assicurazioni, ed è naturale allora che si venga a dare un peso maggiore, nel fare questa specie di bilancio preventivo dei rischi, a quelli più prossimi, mentre nell'impostazione del primo capitolo si cercava la soluzione che desse il migliore risultato anno per anno.

Ciò naturalmente per il caso di non–correlazione; il caso di correlazione nella teoria classica è – se la memoria non mi tradisce – del tutto trascurato, se si prescinde da qualche disquisizione in cui l'ipotesi dell'indipendenza tra i rischi viene messa in dubbio piuttosto per mettere in dubbio la teoria del rischio che per sostenere l'opportunità o la necessità che essa si occupi del caso di rischi correlati.

Anche prescindendo dalla correlazione, il problema del pieno relativo non era in genere concepito sistematicamente come un problema di «optimum», ma ricondotto a problemi di massimo ordinari; è chiaro che, dato un qualunque problema di «optimum» in cui si cerchi di rendere quanto più piccola possibile una grandezza e quanto piu grande possibile un'altra, ogni problema di massimo per una funzione di esse, decrescente rispetto alla prima e crescente rispetto alla seconda, conduce a una particolare soluzione del problema di « optimum ». Così ad esempio si può, per citare due casi considerati dal Neuhaus [15], cercare di rendere minimo il rapporto fra rischio e margine disponibile, oppure massima la differenza fra tale margine e un certo multiplo del rischio. Così si vengono però a mescolare inopportunamente i due problemi del pieno relativo e assoluto, e si lascia poi un'impressione superflua di arbitrarietà. Possiamo incidentalmente osservare che l'arbitrarietà del coefficiente di molteplicità del rischio nell'ultimo esempio, che, presentando il problema come problema di massimo, rende legittimamente perplessi sul valore della conclusione, consente di trovare, al variare del coefficiente, tutta l'infinità delle soluzioni che è ovvia ponendo il problema nella sua vera luce di problema di « optimum ».

E spesso poi la posizione del problema era ancor più lontana da quella qui seguìta, in quanto non ci si proponeva il problema del miglior modo di riassicurare un portafoglio, ma ci si riferiva soltanto ad un'unica polizza nuova che veniva ad aggiungersi ad un portafoglio precostituito, e ci si chiedeva per essa soltanto se e in qual misura si dovesse riassicurare. In tal modo il problema del pieno relativo non si poneva che indirettamente: si trattava di vedere come, a parità di criteri prudenziali, il pieno per quest'unica polizza sarebbe variato variando la tariffa o altre caratteristiche. Quanto alle ragioni per cui tale modo di concepire il problema mi sembra assai poco significativo, risultano da tutte le discussioni fatte per l'importanza del problema del pieno relativo sotto il punto di vista dell'« optimum »; dal punto di vista pratico si potrebbe aggiungere che è vero che stabilendo certi pieni è possibile applicarli alle assicurazioni future ma non a quelle già riassicurate se implicassero il ritiro di una parte delle quote cedute (se si introducessero, cioè, pieni superiori ai precedenti), ma di ciò si tiene conto direttamente se, per le polizze già riassicurate, si considera senz'altro soltanto la parte non ceduta, che potrà quindi apparire opportuno se mai riassicurare ulteriormente, ma non meno, poichè ciò non avrebbe neppur senso.

A proposito di tutte le considerazioni della teoria classica sussiste poi l'obiezione che la probabilità di esistenza in vigore di una polizza a un'epoca determinata dovrebbe farsi tenendo conto non solo della probabilità di morte ma anche di quella di rescissione.

15) Cfr. Bibliografia.

15. *I « pieni assoluti ».* — Le osservazioni fatte con riferimento all'impostazione secondo i vari punti di vista facenti capo alla teoria classica del problema dei « pieni relativi » hanno attinenza quasi tutte anche col problema del pieno assoluto, come si sarà visto senza che occorra perciò ripeterle e farne espressamente menzione. Ma altre osservazioni più specifiche e di maggiore importanza per il problema del pieno assoluto dobbiamo fare riallacciandosi ora alle considerazioni del n. 11, sull'adeguatezza del punto di vista consistente nell'occuparsi delle sole polizze esistenti, seguendole fino all'estinzione.

Tale circostanza e le obiezioni che si possono fondare su di essa non hanno alcuna influenza, come s'è visto, sul problema del pieno relativo, e ciò è ben naturale in quanto in esso interviene solamente il raffronto tra la diminuzione che subiscono, per effetto della riassicurazione, da una parte il quadrato del rischio e dall'altra il margine di guadagno; il problema quindi non muta se l'una o l'altra diminuzione si alterano proporzionalmente, come appunto avviene considerando un'assicurazione per tutta la sua durata anzichè per un solo anno.

Per il problema del pieno assoluto non è più invece così; questo stesso ragionamento conduce però subito a una conclusione di massima che mette in luce la relazione fra i due punti di vista per riguardo al pieno assoluto. Abbiamo detto che v'è proporzionalità fra la diminuzione del quadrato del rischio e quella del margine di guadagno; il coefficiente di proporzionalità rappresenta il valore di una « rendita » media, e precisamente di una rendita che vada decrescendo proporzionalmente all'assottigliarsi del portafoglio esistente nel corso degli anni futuri (esattamente: che decresca come la speranza matematica del σ^2), e tale coefficiente indicheremo con a; dato che oltre alle probabilità di morte e storno anche la diminuzione della somma sotto rischio per le normali forme di assicurazione conduce ad attribuire pesi rapidamente decrescenti ai successivi termini di tale rendita, e tenendo conto altresì che ci riferiamo a un portafoglio quale esiste in un dato momento (non di un gruppo di polizze all'inizio della loro durata), si potrà valutare senza timore di tenersi eccessivamente al di sotto del vero circa $a = 4$, come faremo per un'esemplificazione.

Se dunque $\bar{k}$ e $\bar{\sigma}^2$ divengono $a\bar{k}$ ed $a\bar{\sigma}^2$, $\bar{\sigma}$ diverrà $\sqrt{a}\,\bar{\sigma}$, e pertanto il parametro

$$t = \bar{G}/\bar{\sigma} = \frac{G_n}{\bar{\sigma}} + \frac{\bar{k}}{\bar{\sigma}}$$

diverrà

$$\frac{\bar{G}_n + ak}{\sqrt{a}\,\bar{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\bar{G}_n}{\bar{\sigma}} + \sqrt{a}\,\frac{\bar{k}}{\bar{\sigma}},$$

ossia: del parametro t, che è un indice del grado di sicurezza, decresce – in rapporto $1/\sqrt{a}$ – la parte proveniente dal termine $\bar{G}_n$, mentre cresce – nel rapporto $\sqrt{a}$ – l'altra parte che proviene dal termine $\bar{k}$; complessivamente, prevale l'influenza della prima parte se $\bar{G} > \sqrt{a}\,\bar{k}$, della seconda nel caso opposto, e ciò significa a parole che considerando il problema fino a estinzione del portafoglio il grado di sicurezza appare maggiore che ponendolo nell'àmbito di un esercizio se $\bar{G}_n$ (fondo residuo in caso di riassicurazione totale) è minore della media geometrica tra il margine di guadagno perduto per la riassicurazione rispettivamente in un esercizio e in tutta la durata futura (valore attuale). Del resto la conclusione è, qualitativamente, intuitiva, perchè considerare il portafoglio fino all'estinzione altro non significa, nella forma in cui il problema si è posto, se non aumentare il volume dei rischi considerati, e ciò porta ad aumentare il grado di sicurezza derivante da un margine ricorrente proveniente da essi, e a diminuire quello derivante dall'esistenza di un importo fisso. Per $a = 4$, $\sqrt{a} = 2$, prevale l'influenza di $\bar{G}_n$ se è doppio di $\bar{k}$. Quanto detto sussiste sempre premettendo di porre a base della valutazione di sicurezza un medesimo valore di t – ossia una medesima probabilità di fallimento ammissibile – tanto riferendosi a un unico esercizio che riferendosi a tutta la durata; se invece nel secondo caso, appunto per tener conto della diversità di condizioni, si modifica anche t, un confronto diretto come ora non è più possibile.

Rimane da rilevare l'ulteriore, e pure già accennata, ragione di inadeguatezza di questa impostazione; non tenendo conto che del saldo alla estinzione del portafoglio non si prende nota infatti della possibilità di uno sbilancio temporaneo, e ciò equivale a supporre che le operazioni possano essere continuate a credito sino all'ultima definitiva resa di conti. Tale ipotesi è ovviamente troppo ottimistica. E finalmente resta l'obiezione principale, che al portafoglio esistente attualmente verranno ad aggiungersi man mano le polizze di nuova produzione, cosicchè dai computi fatti separatamente sul solo insieme delle assicurazioni già in vigore non rispondono affatto a preoccupazioni che abbiano un significato pratico in relazione al reale andamento degli affari.

Come si è visto, la formula di Hattendorff per sè stessa sarebbe applicabile anche tenendo conto in modo presuntivo della produzione futura, e permetterebbe di calcolare la probabilità che a un'epoca fissata il fondo di garanzia si trovi ad essere esaurito. Non si potrebbe però mai, per questa via, superare l'altra obiezione, e cioè determinare la probabilità di fallimento durante un intero intervallo, la probabilità cioè che il fondo si annulli almeno una volta *entro* l'intervallo, anzichè occuparsi solo del valore all'estremo finale dell'intervallo (tutt'al più se ne può determinare un confine, come diremo nel n. 17). Perciò occorrerà seguire una via del tutto diversa.

16. *Considerazioni conclusive.* — L'impostazione del problema secondo questo nuovo punto di vista sarà oggetto del terzo capitolo; sostanzialmente il fatto nuovo consisterà nella considerazione *dinamica* dell'andamento del fondo.

Prima ancora di sviluppare tale teoria possiamo giudicare senza soverchie esitazioni, sulla base delle considerazioni fin qui svolte, per riguardo a quali problemi e circostanze l'impostazione del primo e del secondo capitolo si possano giudicare sodisfacenti, e per quali invece sarà necessario un esame secondo il preannunciato punto di vista del prossimo capitolo.

Sinteticamente, vorrei riassumere l'impressione globale di quanto precede dicendo che l'impostazione del secondo capitolo non serve a portare su di un piano più alto il problema precedentemente trattato, ma solo a modificare delle circostanze accessorie, consentendo qualche generalizzazione, ma allontanando dalla schematizzazione praticamente più significativa.

Per riguardo al problema dei pieni relativi le soluzioni date in base all'impostazione del primo e del secondo capitolo sono sostanzialmente equivalenti, e non vi sono obiezioni che infirmino quelle trattazioni e conclusioni; possiamo quindi considerarle senz'altro, anche dal punto di vista delle applicazioni pratiche, come sodisfacenti.

Per riguardo al problema del pieno assoluto, le risposte hanno un carattere speciale, come speciali sono le ipotesi dell'impostazione. Non si può dire *a priori* che siano necessariamente inadeguate; vi sono dei casi in cui possono risultare perfettamente aderenti a una certa situazione pratica, ma bisogna discuterlo. Un caso molto semplice, ma che in pratica penso potrebbe considerarsi ben spesso come corrispondente a una ragionevole e sufficientemente tecnica linea di condotta (nonostante un certo grado di semplicismo), è il seguente, per il quale l'impostazione e le considerazioni del primo capitolo dànno una risposta completa.

Anzitutto l'ipotesi estrema: che nessun fondo venisse effettivamente accantonato da un anno all'altro, e il margine di guadagno disponibile in ogni singolo anno fosse quindi tenuto a disposizione per la copertura di scarti sfavorevoli nell'esercizio in corso, la rimanenza considerandosi distribuibile come utile. Non si ha allora nessuna ripercussione da un esercizio all'altro, e basta fissare sufficentemente piccola la probabilità di fallimento in un anno singolo. Poichè è noto però che un fenomeno per quanto poco probabile finisce per verificarsi con certezza pratica pur di aumentare il numero delle prove, sarebbe praticamente certo che, seguendo un simile procedimento, presto o tardi sarebbe da attendere come certo il fallimento. Può trattarsi di convergenza così lenta da ritenere che la conclusione teorica non giustifichi preoccupazioni d'ordine pratico (è praticamente certo ad esempio che proseguendo *illimitatamente* le estrazioni del lotto avverrà una settimana che a tutte le otto ruote escano gli stessi cinque numeri, ma chi vivesse anche milioni di miliardi di millenni avrebbe ancora una probabilità assolutamente trascurabile – dell'ordine di 10^{-30} – di assistere a tale fenomeno). Ma nel caso che occorra o si desideri per maggior prudenza tenerne conto, si può farlo in modo empirico tenendo, a parte, un fondo di garanzia per tali casi eccezionali, da reintegrare negli anni successivi caso mai in circostanze particolarmente sfavorevoli dovesse una volta venire intaccato. L'impostazione del secondo capitolo, pur mancando di una vera e propria giustificazione significativa, potrebbe in casi del genere dare un'idea dell'adeguatezza di un fondo siffatto per rapporto al complesso dei rischi già assunti, anche per gli esercizi avvenire.

17. *Problemi particolari.* — L'esame dell'impostazione classica non è stato intrapreso nel presente capitolo coll'intenzione di dare un cenno completo su tale teoria, ma piuttosto per dare un'occhiata al problema secondo il suo punto di vista durante il passaggio fra le considerazioni da me più ampiamente svolte nei capitoli primo e terzo; non dovrebbe perciò stupire se parecchi aspetti e problemi della teoria classica rimanessero non nominati, perchè non avremmo ragione di nominare se non quelli che apparivano necessari alle considerazioni che ci interessavano. Tuttavia non sarebbe stato opportuno tacere completamente di tali aspetti e problemi, ma era preferibile

almeno nominarli per spiegare brevemente il motivo per cui non è apparso necessario farli entrare nel quadro della impostazione precedente, e per rinviare alle opere che ne trattano chi avesse interesse ad occuparsene espressamente.

Ricordiamo anzitutto le eleganti formule che permettono di esprimere il rischio medio relativo ad un'assicurazione mediante i valori tecnici corrispondenti al saggio d'interesse usualmente considerato i ed al saggio i' definito da $1 + i' = (1 + i)^2$. Per esse rinvio al Manuale del Broggi [16] dato che, costituendo semplicemente un metodo di calcolo, senza involgere nuove questioni che si prestino a una discussione, riportarle qui era superfluo.

Un modo di esprimere il grado di stabilità è quello che si riconduce al concetto di «numero minimo degli assicurati»: la differenza è puramente di forma, ma tuttavia spesso utile per l'imagine espressiva che dà. Per il nostro modo di trattazione è apparso preferibile invece attenersi ai concetti che si presentano direttamente nell'impostazione.

Una questione assai dibattuta specie ai primordi della teoria del rischio era quella della definizione di diversi «indici» del rischio (come «rischio matematico», «rischio medio», ecc.) e della «preferenza» da dare a questo o quello tra essi. Discussioni del genere sono in genere indizio di un problema mal posto: si tratterebbe, secondo tale concezione, di costruire qualche indice del tipo che chiamerei *dilettantistico*, qualcuno cioè di quegli indici che sono fine a sè stessi, e il cui valore dovrebbe servire soltanto come indicazione per una più o meno convenzionale e più o meno opportuna precisazione quantitativa di certe circostanze da esaminare. Invece, nella più parte dei casi, ha senso (ed allora *occorre*, per fare opera effettivamente scientifica) introdurre un indice di quelli che, per contrapposto, chiamerei *effettivi*, di quelli cioè che servono e intervengono necessariamente nella risoluzione di un problema ben definito e bene impostato [17].

---

16) Op. cit., Bibliografia; cfr. pag. 330 e segg.

17) Cfr. le osservazioni, fatte per il caso delle medie ma concettualmente valide per quello di indici qualunque, del CHISINI in *Sul concetto di media*, «Periodico di matematiche», V. IX, n. 2, 1929. Sotto certi aspetti si ricollegano ai concetti del testo anche le considerazioni dello stesso Autore in *Qualità, numeri indici e grandezze*, ibid., V. XIX, n. 5, 1939, nonchè quelle della mia comunicazione al I Congr. Soc. It. Statistica (Pisa, 1939) su *Indici statistici e «teoria delle strutture»*.

Nella nostra trattazione ad esempio l'introduzione dello scarto quadratico medio (o rischio medio) non è stata fatta per decisione arbitraria o per motivi più o meno superficiali di preferenza, ma in base a necessità derivanti dall'impostazione che, indipendentemente da qualsiasi indice, era già stata data al problema, e dalla proprietà caratteristica di cui gode lo scarto quadratico medio [18].

Un campo vasto e interessante di ricerche, che spesso è stato messo e viene messo in relazione con la teoria del rischio, è infine quello delle disuguaglianze del tipo di quella di Bienaymé, che, noto lo scarto quadratico medio o eventualmente altri momenti di una distribuzione di probabilità, dànno dei confini per la probabilità contenuta in determinati intervalli. La più importante di tali disuguaglianze per la teoria del rischio è quella data dal Cantelli, il quale trovò che la probabilità di uno scarto superiore a $t\sigma$ e di segno determinato è non superiore a $1/(t^2+1)$, mentre se il segno è non determinato il confine dato dalla disugaglianza di Bienaymé è $1/t^2$. Il Cantelli ha anche dimostrato che tale confine è il più ristretto possibile per il suo caso (come lo è quello di Bienaymé per il proprio) [19].

All'importanza teorica di simili ricerche non mi sembra però corrisponda sempre un'importanza altrettanto grande della loro applicazione alla teoria del rischio, perchè i confini da esse stabiliti sono d'ordinario eccessivamente elevati quando si tratti di forme di distribuzione particolari quali si presentano in simili problemi pratici. Forse si avvicinerebbero allo scopo disuguaglianze basate su ipotesi supple-

---

18) Cfr. nota [6].

19) Di tale teorema – che il Cantelli ricava come caso particolare della sua teoria generale sulle limitazioni per la probabilità dipendenti dalla conoscenza di dati *momenti* della distribuzione – si può dare la seguente dimostrazione sintetica ed elementare che credo nuova.

Abbiasi dapprima una distribuzione, a valor medio nullo e scarto quadratico medio σ, concentrata *in due soli punti* x e y con masse rispettive p e q; da $p+q=1$, $px+qy=0$, $px^2+qy^2=\sigma^2$, risulta tosto, ponendo $\lambda=x/\sigma$, che $\lambda^2=q/p$, ossia $p=1/(1+\lambda^2)$.

Sia ora una distribuzione qualsiasi, a valor medio nullo e scarto quadratico medio σ, e sia p la massa tra un valore prefisso $\xi>0$ e $+\infty$; concentrando nei rispettivi baricentri x e y le due masse p e q comprese rispettivamente tra ξ e $+\infty$ e tra $-\infty$ e ξ (quindi $x\geq\xi$, $y<0$) lo scarto quadratico medio non può che diminuire (per la nota proprietà dei momenti d'inerzia), e diverrà $\sigma'\leq\sigma$. Posto $\lambda'=x/\sigma'$, avremo per p l'espressione $p=1/(1+\lambda'^2)$; ponendo $\lambda=\xi/\sigma\leq$ $\leq x/\sigma\leq x/\sigma'=\lambda'$, risulta $p\leq 1/(1+\lambda^2)$, c. d. d.

mentari del tipo di quelle di Meidell e Camp [20]; comunque sembra però presumibile che il valore più approssimato della probabilità che interessa sia quello corrispondente all'ammissione che la distribuzione di probabilità sia gaussiana, e che ciò conti più del vantaggio di sapere in qual senso l'espressione sia errata.

Un risultato importante che è possibile stabilire, nell'ordine d'idee della teoria classica, soltanto nel senso di una disuguaglianza, è quello – pure dovuto al Cantelli [21] – relativamente alla probabilità che il fondo di garanzia non si esaurisca alla fine di nessuno fra un certo numero di esercizi successivi considerati. Il teorema delle probabilità totali dice infatti che la probabilità di un valore negativo del fondo in uno almeno degli esercizi è minore (gli eventi essendo compatibili) della somma delle probabilità di tale eventualità per i singoli esercizi. Considerando gaussiana la distribuzione di probabilità per l'ammontare del fondo in ciascun esercizio, considerando (prudenzialmente) gli scarti quadratici medi per ogni periodo parziale (per il primo, i primi due, i primi tre esercizi, e così via) tutti uguali a quello del periodo totale considerato, che prudenzialmente si fissa a 100 anni, il Cantelli giunge ad esempio a stabilire, in base all'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{l/\sqrt{2}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{100\sqrt{\pi}}\int_{\lambda/\sqrt{2}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,,$$

che, prendendo $l = 4,19$ nella formulazione del problema con riferimento al solo risultato finale (formulazione della teoria classica) si ha certo una probabilità di rovina *nel corso di tutto il periodo* non superiore alla probabilità che corrisponde, nella distribuzione gaussiana, a $\lambda = 3$. Nello stesso senso a $\lambda = 4$ corrisponderebbe il valore $l = 4{,}97$.

Conviene rilevare che questo risultato del Cantelli, benchè sia stato enunciato con riferimento alle ordinarie concezioni della teoria classica, e cioè pensando al rischio delle polizze già stipulate in un dato momento, ha in realtà una validità del tutto generale indipen-

20) Per tutte queste ricerche si vedrà utilmente l'esposizione d'insieme datane dal FRÉCHET in *Le generalizzazioni della ineguaglianza di Bienaymé*, « G. I. I. A. », A. II, n. 1, 1931.

21) Cfr. Bibliografia, 2.

dentemente da una simile restrizione; in tal senso il risultato ora esposto si può considerare come un'anticipazione (sia pure sotto forma di una disuguaglianza) dell'impostazione cui sarà dedicato il prossimo capitolo.

CAPITOLO TERZO

IL PROBLEMA DAL PUNTO DI VISTA ASINTOTICO.

18. *Impostazione del problema.* — Volendo effettivamente affrontare il problema della sicurezza di un'azienda in relazione ai rischi che essa corre e alle norme che segue nel costituire i fondi per fronteggiarli, e considerare così il processo nel suo aspetto dinamico, si viene ad impostare un complesso di questioni che si può considerare come una generalizzazione delle classiche ricerche sulla « rovina dei giocatori ». Un'azienda dispone inizialmente di un certo fondo di garanzia G; nei successivi esercizi esso subirà un incremento $X_1, X_2, \cdots, X_h, \cdots$, e cioè un accantonamento (se positivo) ricavato dagli utili dell'esercizio, rispettivamente un prelevamento (se negativo) per coprire le perdite. Il problema più generale consiste nel ricercare le probabilità $P_1, P_2, \cdots, P_h, \cdots$ che il fondo si esaurisca già dopo il primo esercizio, rispettivamente entro due, $\cdots, h, \cdots$, esercizi; matematicamente, P_h è la probabilità che uno almeno dei valori $G+X_1, G+X_1+X_2, G+X_1+X_2+X_3, \cdots, G+X_1+\cdots+X_h$, che rappresentano l'ammontare del fondo al termine dei successivi esercizi, risulti negativo.

Una prima constatazione da fare è la seguente: che, impostando il problema così, non si può più imaginare il « grado di sicurezza » come rappresentato da un unico numero, ma bensì dall'andamento di una successione di numeri; può darsi infatti che, facendo il confronto tra due diverse aziende o fra due diversi criteri che potrebbe seguire una stessa azienda, il confronto fra le probabilità P_h risulti favorevole ora all'una ora all'altra delle due successioni quando varia la durata h. E, effettivamente, ogni impostazione del problema del rischio che si riduca a considerarlo come vertente su di un'unica grandezza numerica non può non considerarsi inadeguata nei confronti della posizione generale del problema, che non si può concepire se non attraverso gli sviluppi nel tempo.

Comunque, come nel primo capitolo ci si era limitati, in sostanza, a considerare quello che ora ci appare come il primo termine della successione P_h, ossia la probabilità P_1 di fallimento già nel primo esercizio, così ci interesserà ora particolarmente il caso altrettanto semplificato costituente l'estremo opposto, e ci occuperemo precisamente della probabilità–limite di fallimento entro un tempo lunghissimo. Che tale limite $P = \lim P_h$ debba esistere si vede immediatamente, perchè le probabilità P_h sono per il loro stesso significato mai decrescenti, e non superiori all'unità; chiameremo il valore P, brevemente, « probabilità di rovina »[22]).

Ecco allora precisato così il nostro còmpito: studiare in qual modo la probabilità di rovina P dipenda dall'importo inizialmente esistente G e dalle distribuzioni di probabilità di $X_1, X_2, \cdots, X_h, \cdots$; cominceremo con un cenno al caso notissimo in cui gli X_h sono indipendenti ed hanno speranza matematica nulla (ossia il gioco è fatto a condizioni eque), perchè vi troveremo gli elementi cui ricondurre l'impostazione generale.

19. *La probabilità di rovina nel caso di condizioni-eque.* — Usando la terminologia più usuale nelle trattazioni di questo problema, consideriamo un giocatore che dispone di una somma iniziale G e si accinge a giocare una successione di « partite » (scommesse, giochi di qualsiasi natura) i cui guadagni indicheremo con $X_1, X_2, \cdots, X_h, \cdots$; gli X sono numeri aleatori (perchè il loro valore dipende dall'esito della partita), e supporremo che siano tra loro stocasticamente indipendenti e che ciascuno di essi abbia speranza matematica nulla, ossia che il gioco sia fatto a condizioni eque. Il caso non differisce dal precedente che nella terminologia, perchè non ci sarebbe che da sostituire « partita » con « utile o perdita da accantonare o prelevare in un dato esercizio »; indicheremo poi con

$$Y_1 = X_1 \quad , \quad Y_2 = Y_1 + X_2 = X_1 + X_2, \cdots ,$$
$$Y_h = Y_{h-1} + X_h = X_1 + X_2 + \cdots + X_h, \cdots$$

il guadagno complessivo nelle prime h partite, cosicchè sarà

$$G + Y_1 \quad , \quad G + Y_2, \cdots, G + Y_h, \cdots$$

---

[22]) Dal punto di vista critico, è necessario osservare che tale *valore asintotico della probabilità di rovina per un tempo lunghissimo* non si identifica necessariamente colla *probabilità di rovina entro un tempo infinito* se non ammettendo il teorema esteso delle probabilità totali (esteso, cioè, alle classi *numerabili*), ciò che, secondo il mio punto di vista ripetutamente esposto, non è giustificato.

l'importo posseduto dopo le successive partite (nell'interpretazione assicurativa: il fondo di garanzia dopo ciascun esercizio).

Il problema che ci interessa, della rovina del giocatore, consiste nella ricerca della probabilità P_h che uno almeno degli importi $Y_1, Y_2, \cdots, Y_h$ risulti $\leq -G$, o, più particolarmente, della probabilità limite P per $h \rightarrow \infty$. Per determinarla in base a considerazioni elementari e intuitivamente significative, supponiamo dapprima che anche l'altro competitore disponga inizialmente di un importo limitato G'' (e scriveremo per simmetria G' anzichè G finchè avremo a riferirci al problema « bilaterale », in cui entrambi i competitori dispongono di un importo *finito*); allora dopo un certo numero h di partite si sarà verificato uno dei tre casi possibili seguenti: o si sarà rovinato l'uno o l'altro dei due competitori, o l'importo Y si sarà mantenuto sempre compreso tra $-G'$ e $+G''$. Data l'ipotesi dell'indipendenza, anche il gioco consistente nel proseguire le partite fino alla rovina dell'uno o dell'altro dei competitori è equo; per assicurarlo basterebbe anzi ~~che~~ ciascuna scommessa risultasse equa anche subordinatamente all'ipotesi che nessuno dei due giocatori si sia precedentemente rovinato [23] mentre cadrebbe in difetto invece, ad esempio, in caso di correlazione positiva tra le X perchè ciò danneggerebbe il competitore più ricco, come risulta ovvio pensando al caso limite di correlazione massima (indice di correlazione $r = 1$) [24]. Dette P', P'' e P^* le probabilità dei tre casi, ed M', M'', M^* le speranze matematiche del guadagno Y_h subordinatamente a ciascuna delle tre ipotesi, dovremo quindi avere $P' M' + P'' M'' + P^* M^* = 0$. La probabilità P^* che il gioco possa continuare ancora dopo h partite

---

[23] La discussione delle condizioni necessarie e sufficenti per le conclusioni in questione è stata più compiutamente esaminata nella nota *La teoria del rischio e il problema della « Rovina dei giocatori »*, « G. I. I. A. », A. X, nn. 1–2, 1939, di poco posteriore alla presente Memoria, della quale riassume i risultati originali di questo terzo capitolo con vari miglioramenti nell'insieme dell'esposizione rispetto alla prima stesura in qualche punto affrettata per l'approssimarsi della scadenza del concorso. Benchè quella Nota (che nelle citazioni seguenti chiamerò semplicemente « Nota riassuntiva ») non contenga nulla che almeno implicitamente non risulti già dalla presente Memoria, rinvio perciò ad essa chi trovasse dei punti non sufficentemente chiari.

[24] L'esempio ovvio cui pensavo è quello del gioco di testa e croce (Cfr. Nota riassuntiva, n. 2); l'affermazione che una correlazione positiva danneggi *sempre* il competitore più ricco mi appare ora dubbia, e sarebbe forse interessante approfondire la questione che mi limito a segnalare.

è comunque decrescente al crescere di h ed è inferiore alla probabilità che sia compreso tra $-G'$ e $+G''$ l'importo Y_h; sotto condizioni molto larghe tende quindi a zero al crescere di h (infatti, sotto condizioni molto larghe, la dispersione di una somma di numeri aleatori indipendenti tende all'infinito, e la probabilità compresa in un intervallo limitato a zero; in particolare ciò avviene nelle condizioni ben note per la tendenza al tipo gaussiano, con scarto quadratico medio tendente all'infinito). Al contrario P' e P'' non possono che crescere con h, tendendo perciò a due valori limite $P' + P'' = 1$; la precedente relazione si ridurrà a $P' M' + P'' M'' = 0$ e dirà che anche il rapporto M'/M'' tende a un limite, e che è il medesimo di P''/P', ossia che le due probabilità di rovina sono

$$P' = \frac{M}{-M' + M''} \quad , \quad P'' = \frac{M}{-M' + M''} .$$

Nel caso semplice ben noto in cui le X_h possono assumere soltanto i valori $-1, 0, +1$, e G' e G'' sono interi, il giocatore che si rovina perde, all'ultimo colpo, tutto il suo avere, cosicchè

$$-M' = G' \quad , \quad M'' = G'' \quad , \quad P' = G''/(G' + G'') \quad , \quad P'' = G'/(G' + G''),$$

ossia le probabilità di rovina sono inversamente proporzionali agli importi iniziali dei competitori. In ogni altro caso la perdita che determina la rovina potrà essere (e in genere sarà) superiore all'importo disponibile, cosicchè anche $-M'$ ed M'' saranno alquanto superiori a G' e G''; la differenza è però inferiore al valore medio del guadagno o della perdita nell'ultima partita, e, se G' e G'' sono – come è da supporre – di un ordine di grandezza sufficientemente più elevato, la precedente conclusione circa P' e P'' sussiste a meno di una correzione di cui si determina facilmente il confine e che è trascurabile.

Quando G'' si fa tendere all'infinito, P' tende ad uno; si ha così la classica conclusione che la rovina di chi gioca contro un competitore infinitamente ricco è, alla lunga, praticamente certa.

20. *La probabilità di rovina nel caso generale.* – Supponiamo ora che la speranza matematica dei guadagni X_h, sempre indipendenti, relativi alle singole partite, non sia nulla, ossia che il gioco non sia equo. Potremo ricondurci al caso precedente dimostrando che, dato un numero aleatorio X, esiste sempre ed è univocamente determinato

il valore α tale che $e^{\alpha X} - 1$ abbia speranza matematica nulla, purchè si supponga (come supporremo, e come è ovvio nei casi pratici ove i valori che X può assumere sono limitati), che $e^{\alpha X}$ abbia speranza matematica finita almeno per α abbastanza piccolo, ossia che la funzione caratteristica abbia nell'origine un punto regolare, e cioè, per il teorema di Cauchy–Hadamard, la media di potenze d'ordine h della distribuzione non cresca al variare di h più rapidamente di $\sqrt[h]{h!}$. Basta osservare che per $\alpha = 0$ si ha identicamente $e^{\alpha X} - 1 = 0$, e quindi $\varphi(\alpha) = \mathfrak{M}(e^{\alpha X}) = 1$, che $\varphi(\alpha)$ è funzione continua e concava essendolo $e^{\alpha X}$ per ogni particolare valore di x, e che diviene infinita o tende all'infinito all'allontanarsi di α dallo zero sia in senso positivo che negativo (purchè la X possa assumere valori tanto positivi che negativi, ciò che pure è ovvio nel nostro caso). Per $\alpha = 0$ è $\varphi'(\alpha) = \mathfrak{M}(X)$, e si ha quindi una seconda (ed unica) radice positiva α di $\varphi(\alpha) - 1 = 0$ se la speranza matematica di X è negativa, e una radice negativa nel caso opposto. Se $\mathfrak{M}(X) = 0$ assumeremo $\alpha = 0$.

Dimostriamo inoltre che la somma di due numeri aleatori X_1 e X_2 ha un valore α compreso tra α_1 e α_2, e quindi in particolare una somma di numeri aleatori aventi un medesimo valore α ha ancora per α questo stesso valore.

Posto

$$\varphi_1(\alpha) = \mathfrak{M}(e^{\alpha X_1}) \quad , \quad \varphi_2(\alpha) = \mathfrak{M}(e^{\alpha X_2}),$$

per l'ipotesi dell'indipendenza si ha

$$\varphi(\alpha) = \mathfrak{M}(e^{\alpha(X_1 + X_2)}) = \mathfrak{M}(e^{\alpha X_1}) \cdot \mathfrak{M}(e^{\alpha X_2}) = \varphi_1(\alpha) \cdot \varphi_2(\alpha).$$

Ora, se α_1 e α_2 hanno lo stesso segno, e sia, per fissare le idee,

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 ;$$

sarà

$$\varphi(\alpha_1) = \varphi_1(\alpha_1)\,\varphi_2(\alpha_1) = \varphi_2(\alpha_1) < 1 ,$$

$$\varphi(\alpha_2) = \varphi_1(\alpha_2)\,\varphi_2(\alpha_2) = \varphi_1(\alpha_2) > 1 ,$$

e quindi $\varphi(\alpha) = 1$ per un α di (α_1, α_2). Se hanno segni opposti, e sia $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$, sarà analogamente $\varphi(\alpha_1) > 1$, $\varphi(\alpha_2) > 1$, ed entrambe le radici, 0 e α, di $\varphi(\alpha) = 1$, dovranno trovarsi tra α_1 e α_2 [25].

---

25) Anzichè l'ipotesi dell'indipendenza basta fare l'ipotesi (assai meno restrittiva) che il valore α_2 che compete a X_2 *subordinatamente a un qualunque valore* x *assunto da* X_1 rimanga invariato per qualunque x, ossia, indicando con $\mathfrak{M}_x$ il valor medio subordinato all'ipotesi $X_1 = x$, che esista un numero α_2 tale che

Supponiamo ora appunto che i numeri aleatori $X_1, X_2, \cdots$ $\cdots, X_h, \cdots$ del nostro problema abbiano tutti per α un medesimo valore; per quanto detto il medesimo α vale anche per le Y_h, e il ragionamento precedente si può ripetere ora applicandolo al gioco equo consistente nel seguitare un processo che dà la successione di guadagni $e^{\alpha Y_h} - 1$ finchè si giunga ad uscire dai limiti $e^{-\alpha G'}$ ed $e^{\alpha G''}$. Supposto come nel numero precedente che la dispersione divenga infinita, e si abbiano quindi due probabilità–limiti P' e P'' di rovina del primo e secondo competitore, con $P' + P'' = 1$, avremo l'equazione

$$P'(e^{-\alpha G'} - 1) + P''(e^{\alpha G''} - 1) = 0$$

da cui

$$P' = e^{\alpha G'} \frac{e^{\alpha G''} - 1}{e^{\alpha(G'+G'')} - 1} \quad , \quad P'' = e^{\alpha G''} \frac{e^{\alpha G'} - 1}{e^{\alpha(G'+G'')} - 1}$$

(anche qui colle stesse osservazioni sul grado di approssimazione della formula, in cui non si tien conto del margine di perdita che rimane insoluto nell'ultima partita giocata).

Nel nuovo caso il passaggio al limite per $G'' \to \infty$ dà

$$P' \to 1 \qquad \text{se} \quad \alpha > 0$$

(come nel caso $\alpha = 0$ già esaminato), e

$$P' \to e^{\alpha G'} . \qquad \text{se} \quad \alpha < 0$$

---

identicamente in x sia $\mathfrak{M}_x(e^{\alpha_2 X_2}) = 1$. Si noti che allora è pure, per ogni x, $\mathfrak{M}_x(e^{\alpha X_2}) < 1$ per α compreso tra zero e α_2, ed $\mathfrak{M}_x(e^{\alpha X_2}) > 1$ per x esterno a tale intervallo.

Per $X = X_1 + X_2$ avremo

$$\varphi(\alpha) = \mathfrak{M}(e^{\alpha(X_1+X_2)}) = \mathfrak{M}(e^{\alpha X_1} \cdot e^{\alpha X_2}) = \mathfrak{M}[e^{\alpha X_1} \cdot \mathfrak{M}_{x_1}(e^{\alpha X_2})] = \varphi_1(\alpha)\,\bar{\varphi}_2(\alpha)$$

ove $\bar{\varphi}_2(\alpha)$ è una media fra i valori di $\mathfrak{M}_x(e^{\alpha X_2})$ al variare di x e quindi, per quanto visto, ancora una funzione concava risp. < 1 e > 1 all'interno e all'esterno dell'intervallo tra zero e α_2. Ma questa sola è la proprietà di $\varphi_2(\alpha)$ utilizzata per la dimostrazione del testo nel caso di indipendenza; la dimostrazione e la conclusione sussistono pertanto inalterate nel nuovo caso più generale.

Se poi α_2 varia con x, detti α_2' e α_2'' il minimo e il massimo tra cui varia α_2, si vede allo stesso modo che la conclusione sussiste ancora generalizzandola nel senso che il valore α corrispondente ad $X = X_1 + X_2$ cade nell'intervallo compreso entro i due estremi fra i tre valori $\alpha_1, \alpha_2', \alpha_2''$.

La prima generalizzazione era contenuta, sostanzialmente, già nella Nota riassuntiva, n. 3.

Essendo con ciò ritornati al caso unilaterale, torneremo a scrivere P e G anzichè P' e G', cosicchè avremo al limite $P = 1$ se $\alpha \geqq 0$, $P = e^{\alpha G}$ se $\alpha < 0$. Se, in altre parole, le condizioni del gioco non sono eque, ma favoriscono un giocatore, egli può giocare indefinitamente contro un avversario infinitamente ricco senza che, al crescere del numero delle partite, la probabilità di perdita diventi certezza pratica. La probabilità–limite di rovinarsi dipende dall'importo iniziale G, e precisamente al crescere di G decresce in progressione geometrica. Converrà anzi, poichè interesserà evidentemente studiare soltanto il caso di α negativo, porre $B = -1/\alpha$: B è allora l'importo iniziale cui corrisponde una probabilità (limite) di rovina $1/e = 0{,}368$ e lo chiameremo «livello di rischiosità». In base al livello di rischiosità la probabilità di rovina si scrive $e^{-G/B}$, e si può osservare in particolare che per ridurre la detta probabilità al valore di 10^{-c} si deve avere $G = 2{,}3\, cB$ (ossia $G = cB \log_e 10$). Si può notare ancora che la probabilità $1/2$ corrisponde a $G = 0{,}693\, B$ (ossia $G = B \log_e 2$); lo notiamo perchè da un punto di vista intuitivo potrebbe forse apparire preferibile scegliere come indice tale valore cui corrisponde la probabilità $1/2$ anzichè B cui corrisponde il valore $1/e$; si tratta sempre comunque di una scelta convenzionale, e quella fatta è la più conveniente dal punto di vista analitico, per le stesse ragioni per cui il numero e si assume come base dei logaritmi naturali.

Tutto il problema si riduce quindi a quello della determinazione di B per la distribuzione di probabilità dei numeri aleatori X_h: mediante la funzione caratteristica, si tratta insomma di determinare la radice dell'equazione

$$\varphi\left(-\frac{1}{B}\right) = 1\,, \quad \text{ossia} \quad \log \varphi\left(-\frac{1}{B}\right) = 0\,.$$

Per la terminologia, osserviamo che s'intende generalmente per funzione caratteristica (col Lévy) la funzione $\mathfrak{M}(e^{itX})$; il coefficiente immaginario i è necessario perchè la nozione abbia validità in ogni caso, o, per meglio dire, perchè sia sull'asse reale anzichè sull'asse immaginario che la funzione caratteristica risulta definita per qualunque distribuzione; poichè nel nostro caso è certo per motivi pratici ed è essenziale per la trattazione analitica che esista anche $\mathfrak{M}(e^{tX})$ per t reale (almeno in un certo intervallo), ed è proprio dei valori reali che abbiamo interesse a occuparci, ci riferiremo sempre – per ovvia opportunità – alla funzione $\varphi(t) = \mathfrak{M}(e^{tX})$ (senza fattore immaginario), chiamandola tuttavia «funzione caratteristica».

Consideriamo, come caso particolare, quello in cui la distribuzione di probabilità delle X si supponga gaussiana. È allora

$$\log \varphi(t) = mt + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \quad \text{e quindi} \quad \log \varphi(t) = 0 \quad \text{per} \quad t = -\frac{2m}{\sigma^2}$$

da cui

$$B = -\frac{1}{t} = \frac{\sigma^2}{2m} \cdot$$

Nel caso gaussiano B è data pertanto dal rapporto fra il quadrato dello scarto quadratico medio e il doppio della speranza matematica; è facile vedere che tale formula è valida in generale come prima approssimazione nel caso in cui le X si scostino poco dalle condizioni di « equità ».

Se infatti scriviamo $X = \overline{X} + m$ con $\overline{X}$ numero aleatorio a speranza matematica nulla e m costante, si ha come è noto (indicando con φ e con $\overline{\varphi}$ rispettivamente la funzione caratteristica di X e di $\overline{X}$)

$$\varphi(t) = e^{mt}\,\overline{\varphi}(t)$$
$$\log \varphi(t) = mt + \log \overline{\varphi}(t)$$

e quindi $\log \varphi(t) = 0$ per t radice dell'equazione $\frac{1}{t}\log \overline{\varphi}(t) = -m$, ossia per $B = -1/t$ radice dell'equazione

$$B \log \overline{\varphi}\left(-\frac{1}{B}\right) = m\,.$$

Poichè $\log \overline{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2)$,

$$\frac{B}{m}\log \overline{\varphi}\left(-\frac{1}{B}\right) = \frac{\sigma^2}{2Bm} + o\left(\frac{1}{mB^2}\right),$$

e quindi, per $m \to 0$, B radice dell'equazione precedente tende all'infinito in modo che $2Bm \to \sigma^2$, ossia $B \simeq \sigma^2/2m$.

Se si tenesse conto del seminvariante terzo, ponendo

$$\log \overline{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \gamma t^3,$$

si otterrebbe analogamente l'espressione in seconda approssimazione di B in funzione di m

$$\frac{1}{B} = \frac{2m}{\sigma^2}\left(1 + 8\frac{m\gamma}{\sigma^4}\right).$$

21. *Considerazioni sulle applicazioni nella teoria del rischio.* – L'impostazione della teoria del rischio secondo lo schema di processo aleatorio infinito che abbiamo preso in esame corrisponde sostanzialmente alla concezione del Lundberg, nota sotto il nome di teoria collettiva del rischio. Il modo di trattare il problema, al quale ci siamo qui attenuti, è però molto diverso da quello del Lundberg, e costituisce un tentativo di dimostrazione sintetica dei risultati della teoria collettiva del rischio.

Il concetto informatore di tale dimostrazione sintetica risale al De Moivre, che ne fece un «artificio» per dimostrare sinteticamente come la probabilità P di rovina di un giocatore che si accinga, con m lire iniziali contro n del competitore, a una successione indefinita di partite in ciascuna delle quali possa o guadagnare un importo b con probabilità p o perdere un importo a con probabilità q, sia

$$P = \frac{x^m - 1}{x^{m+n} - 1}$$

con x radice dell'equazione

$$px^{a+b} - x^a + q = 0 .$$

L'«artificio» consisteva nell'imaginare le «lire» in palio nelle scommesse sostituite da «gettoni» di valore variabile in progressione geometrica

$$1 , x , x^2 , x^3 , \dots , x^m , x^{m+1} , \dots , x^{m+n}$$

in modo che tutte le scommesse divengano eque (supponendo che il primo giocatore conservi sempre i primi gettoni nell'ordine indicato, e l'altro i successivi, cosicchè il primo mette in palio gli ultimi, nell'ordine, fra quelli che possiede, e il secondo i primi); la condizione di equità è l'equazione soprascritta che definisce la ragione x della progressione, e la formula che dà P non è che il rapporto $G'/(G' + G'')$ fra il valore dell'importo iniziale del primo giocatore e di entrambi insieme. Cercando, in luogo di questa particolare concreta interpretazione di «artificio», il significato concettuale del procedimento, si vede che esso consiste nel sostituire al numero aleatorio X (capace di assumere i valori $-a$ e $+b$) il numero aleatorio $e^{\alpha X} - 1$ (valori possibili $e^{-\alpha a} - 1$ ed $e^{\alpha b} - 1$; probabilità invariate); in tal modo il problema si riconnette spontaneamente alla nozione di funzione caratteristica e alla moderna teoria dei numeri aleatori, che permette di riconoscere agevolmente, come è stato fatto nel n. 20 (per quanto mi consta per la prima volta) il carattere generale del procedimento e del risultato.

Il metodo del Lundberg è invece essenzialmente analitico, e, data la grande diversità dei due procedimenti, è ovvio che ciascuno debba presentare in confronto all'altro pregi e difetti, che ora tratteggeremo per un primo orientamento, ma che meglio appariranno dal seguito. La differenza, nei tratti principali, consiste in ciò: che il metodo analitico ha bisogno di ipotesi particolarizzate, conduce direttamente alla soluzione esatta ma troppo complicata per l'uso pratico, permette di ricavare da questa la soluzione approssimata (quella del n. 20) per via analitica che non ne mette in evidenza le ragioni; il metodo sintetico al contrario non suppone nulla più del necessario riguardo al meccanismo del processo aleatorio, conduce direttamente alla formula approssimata mostrando senz'altro quale sia il suo significato e quale il significato del termine correttivo che occorrerebbe per giungere alla soluzione esatta; dà con ciò un modo per stimare anche l'ordine di grandezza di tale termine correttivo, ma probabilmente (dico probabilmente perchè tale questione sarebbe appena da studiare) non potrebbe dare di tale termine correttivo l'espressione esatta, dato che ciò dipende (credo) in modo essenziale da quelle particolareggiate ipotesi da cui l'impostazione sintetica prescinde e che richiedono l'adozione di metodi analitici.

Nell'applicazione alle assicurazioni l'eliminazione di ipotesi restrittive e di schematizzazioni precise ha un'importanza a mio modo di vedere essenziale, e l'« esattezza » del risultato un valore poco meno che illusorio: dato il largo margine di indeterminatezza con cui ha senso pensar definiti e conosciuti nella pratica i dati e le condizioni di un tale problema (e particolarmente per quanto concerne le questioni di cui si occupa la teoria del rischio), importa assai più una conclusione magari grossolana dal punto di vista dell'esattezza numerica ma semplice, significativa e adeguata alle necessità dal punto di vista dell'esattezza concettuale e sostanziale. È per tale motivo che ho ritenuto e ritengo preferibile basare la trattazione – fondamentalmente – sulla precedente impostazione sintetica, riservandosi eventualmente di far ricorso ai metodi analitici quando occorra, accessoriamente, per determinare qualche termine correttivo, per completare qualche precisazione, per approfondire qualche dettaglio.

Secondo la via da noi seguìta, le ipotesi sono ovviamente ridotte al minimo indispensabile per la validità dei risultati: quello che si suppone è soltanto

1) che in tutti gli esercizi si abbia il medesimo livello di rischiosità B [26], e

2) che la probabilità che il fondo $G + Y_h$ dopo un tempo h sia inferiore a un limite assegnato tenda a zero, per quanto elevato sia quel limite, quando $h \to \infty$.

Inoltre, in via accessoria, ma non per render valide le considerazioni svolte per sè stesse, bensì soltanto per assicurare che sia trascurabile il termine correttivo trascurato, dipendente dal margine insoluto dell'ultima perdita, occorre supporre ancora

3) che sia piccolo il valore (presumibile; esattamente: la speranza matematica) di tale margine. Precisamente: dev'essere piccolo rispetto al livello di rischiosità B perchè sia piccolo l'errore *relativo* su P, e piccolo rispetto a G perchè l'errore su P sia poco essenziale, nel senso di corrispondere a una lieve oscillazione di G.

Inoltre, anche le prime condizioni (che pur non sono formulate come la terza in modo per sè stesso impreciso) non hanno bisogno d'esser soddisfatte rigorosamente. Sappiamo infatti, dal teorema dimostrato per i valori α nel n. 20, che, se il livello B anzichè rimaner fisso assume nei diversi esercizi i valori $B_1 B_2 \cdots B_h$ la soluzione è quella relativa a un certo valore B intermedio fra i B_h e, se questi non differiscono tra loro in misura troppo sensibile, tale conclusione è più che sufficiente per valutare la situazione in modo adeguato. Anche la seconda condizione potrebbe venire attenuata senza influire in modo sensibile sul risultato: se la dispersione, pur non divenendo infinita, diviene molto grande, la probabilità P relativa a questo caso

26) Si dovrebbe precisare, per togliere ogni possibile ambiguità: «il medesimo livello di rischiosità B, *indipendentemente dal risultato degli esercizi precedenti* (nel senso della nota 25)». Analogamente, perchè la trattazione matematica si adegui anche formalmente a tale enunciato, occorre integrare quella del testo (che si riferisce all'ipotesi dell'indipendenza) colle considerazioni della nota in calce 25). Sostanzialmente tale complemento era stato dato nella Nota riassuntiva (n. 3), cui rimando anche per ulteriori precisazioni sull'esatto ruolo delle diverse condizioni ed ipotesi.

L'abbandono dell'ipotesi di indipendenza è essenziale per l'applicabilità alla teoria del rischio (già per il fatto banale che negli anni successivi al decesso di un individuo viene a mancare l'assicurazione sulla sua testa), come si è rilevato al n. 13. Anche senza il completamento della dimostrazione si poteva però desumere dal significato dell'impostazione (considerazione di una trasformata esponenziale) e dalle osservazioni del n. 19 (presso il richiamo 23) di nota in calce) che un'interdipendenza priva di influenza sul livello di rischiosità non avrebbe potuto infirmare le conclusioni.

sarebbe (a prescindere al solito dal termine correttivo) la stessa che, nel caso di divergenza, la probabilità P_h della rovina entro un tempo h cui corrisponda la medesima dispersione. Se tale dispersione è grande sarà grande h, e P_h differirà poco dalla probabilità di rovina $P = \lim P_h$ del caso di divergenza.

Data l'estesa generalità di tali ipotesi, apparirà ben giustificato asserire che la teoria schematizzata si adatta a studiare il problema dei fondi di garanzia per qualunque genere di aziende, e in particolare per le imprese di assicurazione, caso di cui ci interessa occuparci. Si possono fare ipotesi diversissime sul modo d'accantonare e gestire i fondi di garanzia, e ciascuna naturalmente richiererebbe una trattazione a parte, in quanto diversa sarebbe, per ogni ipotesi, la distribuzione di probabilità degli X_h, ma tutto si ridurrebbe in ogni caso alla determinazione del livello di rischiosità B corrispondente a tale distribuzione. Cominciamo dal caso più semplice, in quanto più vicino allo schema del gioco, e in quanto conduce direttamente a considerare le singole polizze: quello in cui si suppone che tutto il margine di utile o perdita derivante dall'esercizio venga accantonato o prelevato dal fondo di garanzia, e costituisca quindi l'incremento (positivo o negativo) X_h, mentre gli interessi del fondo stesso non vengano accantonati.

22. *Livello di rischiosità delle singole polizze.* – In tal modo X_h è la somma dei guadagni o perdite derivanti da ogni singola polizza: $X_h = X_h^{(1)} + X_h^{(2)} + \cdots + X_h^{(n)}$. Se supponiamo i singoli rischi stocasticamente indipendenti, volendo che X_h abbia un livello di rischiosità non superiore a un certo importo B prefissato, bisogna che altrettanto avvenga per ogni singola polizza, perchè soltanto così si può esser certi che la condizione sarà soddisfatta nel complesso qualunque sia l'insieme delle assicurazioni che il pubblico vorrà sottoscrivere. Nel caso di cui ci occupiamo si vede dunque che – dato il fondo iniziale G – la probabilità di rovina P non dipende dall'entità del portafoglio nei singoli esercizi nè dal modo in cui esso potrà svilupparsi nel tempo, ma soltanto dal livello di rischiosità delle singole polizze. Naturalmente la probabilità di rovina entro un tempo determinato è più alta quanto maggiore è il cumulo dei rischi in ciascun anno, ma anche se esso è piccolo la probabilità di rovina entro un tempo determinato è più bassa solamente in quanto si avvicina più tardi, crescendo più lentamente, al medesimo limite P, non in quanto tenda a un limite diverso meno elevato.

Vediamo allora cosa significa e come si determina il livello di rischiosità B per una singola assicurazione o scommessa, in cui il capitale sia C, p la probabilità di incassarlo ossia il premio puro e π il premio applicato al netto delle effettive spese (provvigioni, gestione). Naturalmente, per le assicurazioni vita, si dovrà intendere di riferirsi, come nel capitolo I, alla parte costituente l'assicurazione di rischio in un singolo esercizio. I valori possibili per il guadagno X sono rispettivamente $C\pi$ e $C(1-\pi)$ con probabilità $1-p$ e p, e quindi la funzione caratteristica è

$$\varphi(t) = (1-p)\, e^{C\pi t} + p e^{C(1-\pi)t} = e^{C\pi t}\left[1 - p\,(1 - e^{-Ct})\right].$$

Per $t = -1/B$ è $\varphi(t) = 1$ e quindi

$$e^{C\pi/B} = 1 + p\,(e^{C/B} - 1),$$

cosicchè

$$\pi = \frac{B}{C}\log\left[1 + p\,(e^{C/B} - 1)\right]$$

è l'espressione esplicita di π in funzione di p, B e C. Meglio: di p e di $\gamma = C/B$, ossia del capitale assicurato rapportato al «livello di rischiosità»

$$\pi = \frac{1}{\gamma}\log\left[1 + p\,(e^{\gamma} - 1)\right].$$

Converrà ricorrere allo sviluppo in serie per meglio vedere la dipendenza di π da p quando le condizioni si scostano poco da quelle di equità $(B = \infty)$. Scriviamo

$$\log\left[1 + p\,(e^{\gamma} - 1)\right] = p\,(e^{\gamma} - 1) - \frac{1}{2}p^2(e^{\gamma} - 1)^2 + \frac{1}{3}p^3(e^{\gamma} - 1)^3 -$$

$$- \frac{1}{4}p^4(e^{\gamma} - 1)^4 + o(\gamma^4) = p\left[\gamma + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{6}\gamma^3 + \frac{1}{24}\gamma^4 + o(\gamma^4)\right] -$$

$$- \frac{1}{2}p^2\left[\gamma^2 + \gamma^3 + \frac{7}{12}\gamma^4 + o(\gamma^4)\right] + \frac{1}{3}p^3\left[\gamma^3 + \frac{3}{2}\gamma^4 + o(\gamma^4)\right] -$$

$$- \frac{1}{4}p^4\left[\gamma^4 + o(\gamma^4)\right] + o(\gamma^4) = \gamma p + \frac{1}{2}\gamma^2 pq + \frac{1}{6}\gamma^3[p - 3p^2 + 2p^3] +$$

$$+ \frac{1}{24}\gamma^4[p - 7p^2 + 12p^3 - 6p^4] + o(\gamma^4)$$

da cui

$$\pi = p \left\{ 1 + \frac{1}{2}\gamma q + \frac{1}{3}\gamma^2 \left[\left(p - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{24}\gamma^3 \left[1 - 7p + 12p^2 - 6p^3\right] + o(\gamma^3) \right\}.$$

Osserviamo, per limitarci alla prima approssimazione $\pi = p(1 + \frac{1}{2}\gamma q)$, che il caricamento *percentuale* dovrebbe essere proporzionale a γ ossia al capitale C – e quindi il caricamento assoluto $C(\pi - p)$ non a C ma a C^2

$$C(\pi - p) = \frac{1}{2} pq C^2/B$$

(come ci poteva dire, e ci può ora confermare, la formula generale $B = \sigma^2/2m$ osservando che $C(\pi - p) = m$, $pqC^2 = \sigma^2$). In pratica non sarebbe ovviamente possibile graduare il caricamento destinato a fronteggiare il rischio in una misura conforme a tale regola; fissando un caricamento percentuale uniforme si verrà a gravare più del necessario le polizze per piccole somme assicurate, ma ciò è giustificato perchè in compenso gran parte delle altre cause (spese ecc.) richiederebbero un caricamento proporzionalmente maggiore per le polizze minori; quanto alle polizze per somme più elevate, quando si ecceda il limite per cui il caricamento cessa di essere sufficiente in relazione al voluto livello di rischiosità B si dovrà ricorrere alla riassicurazione, ed è da notare il fatto che (in base alla formula che dà B in prima approssimazione) si giunge così al medesimo criterio per i pieni relativi dato nel n. 3. Ciò vale anzi in generale (come appunto al n. 3), e non solamente per il caso semplice approfondito nel numero precedente; risulta ora che, in relazione al problema della rovina quale si formulerebbe supponendo di accantonare tutti gli utili, il rapporto σ^2/k del cap. I che, supponendo coincidenti le condizioni di riassicurazione e quelle di accettazione, si identifica coll'attuale σ^2/m, rappresenta $2B$, ossia, noto l'importo G disponibile inizialmente (il G_0 del n. 2) permette di determinare la probabilità di rovina $P = e^{-G/B}$.

23. *Influenza degli interessi sul fondo.* – Se supponiamo, a modifica delle ipotesi precedentemente considerate, che anche gli interessi prodotti dal fondo di garanzia vengano in esso accantonati, non avremo più un incremento nel fondo di garanzia dato da X_h = somma

dei guadagni o perdite derivanti da ogni singola polizza, ma da $X_h + i(G + Y_{h-1})$, poichè a questi termini andrà aggiunto l'interesse. Formulando il problema in tal modo sarebbe impossibile ricondurlo ai concetti informativi della nostra trattazione, ma è spontaneo girare la difficoltà considerando tutti gli importi scontati: anzichè la successione

$$G \quad , \quad G + Y_1 \quad , \quad G + Y_2 , \dots , G + Y_h , \dots$$

consideriamo la successione

$$G \quad , \quad v(G + Y_1) \quad , \quad v^2(G + Y_2) , \dots , v^h(G + Y_h) , \dots$$

per quest'ultima l'incremento è

$$v^h(G + Y_h) - v^{h-1}(G + Y_{h-1}) = v^h[G + Y_{h-1} + i(G + Y_{h-1}) + X_h] -$$
$$- v^{h-1}(G + Y_{h-1}) = v^h X_h ,$$

e la probabilità che l'una o l'altra successione divenga nulla o negativa entro un termine determinato sono uguali, dato che i segni dei singoli termini non vengono modificati per la presenza del fattore v^h.

Il livello di rischiosità B_h dell'h-esimo esercizio, per il fattore v^h, diviene ovviamente (in prima approssimazione) $v^h B_h$, e se B_h non varia con h, avremo la successione Bv^h cui corrisponderà un valor medio $\overline{B} < B$ agli effetti del calcolo di $P = e^{-G/\overline{B}}$ (che sarà quindi minore di $e^{-G/B}$). Occorrerebbe naturalmente uno studio più approfondito per giungere a conclusioni quantitativamente precise o almeno sufficienti a proposito di $\overline{B}$; qui volevo solo indicare in qual modo si possa istituire un nesso fra tale caso e quello precedente, e come ciò possa forse aprire la via per uno studio esauriente del presente problema. Bisogna però aggiungere ancora un'altra osservazione: la dispersione diviene infinita (come vuole la condizione 3 del n. 21) soltanto se l'aumento del portafoglio si suppone abbia luogo con progressione più rapida di quella corrispondente alla capitalizzazione al saggio d'interesse supposto per il fondo di garanzia. Altrimenti la dispersione rimane limitata, e perchè le conclusioni rimangano valide con sufficiente approssimazione occorre almeno che sia sufficientemente alto il valore di una rendita perpetua di termini variabili secondo le presunte variazioni future dell'entità del portafoglio.

24. *Esempio di altre possibili norme.* – Poichè è naturale che nella pratica non tutto l'utile venga accantonato in un fondo di garanzia, rimane a vedere come si presenti il problema nel caso di norme che sotto tale aspetto si avvicinino meglio alla realtà. È possibile immaginare con largo grado di arbitrarietà delle norme del genere e, interessandoci più che altro chiarire concretamente il modo in cui si applicherebbero ad esse i concetti della presente trattazione, ci limiteremo ad un'unica applicazione esemplificativa.

Supponiamo che al fondo di garanzia venga devoluta una certa percentuale ρ dell'utile negli anni in cui utile esiste, e che da esso venga prelevato quanto occorre a coprire le perdite.

In funzione dell'utile complessivo Z_h, l'incremento X_h sarà definito da

$$X_h = Z_h \quad \text{per} \quad Z_h < 0$$

$$X_h = \rho Z_h \quad \text{per} \quad Z_h > 0 .$$

Siano p' e p'' la probabilità che Z_h sia <0 risp. >0 $(p'+p''=1)$, siano $-m'$ ed m'' la speranza matematica di Z_h nelle ipotesi $Z_h<0$ e $Z_h>0$ $(p''m''-p'm'=m=$ speranza matematica di $Z_h)$, ed infine σ'^2 e σ''^2 la speranza matematica di $(Z_h-m)^2$ nelle due stesse ipotesi (analogamente: $\sigma^2=p'\sigma'^2+p''\sigma''^2=$ scarto quadratico medio di Z_h). Per X_h avremo allora la speranza matematica

$$\overline{m} = -p'm' + \rho p''m'' = \rho m - (1-\rho)\,p'm',$$

e lo scarto quadratico medio

$$\overline{\sigma}^2 = p'\sigma'^2 + \rho^2 p''\sigma''^2 = \rho^2\sigma^2 + (1-\rho^2)\,p'\sigma'^2 .$$

Dovremo avere $\overline{m}$ positivo, e quindi $\rho > \dfrac{p'm'}{p''m''}$; $\overline{m}$ sarà però abbastanza piccolo (perchè non si vedrà ragione di alimentare il fondo di garanzia in modo sensibilmente superiore a quanto in media necessario), e applicando quindi la formula $B=\overline{\sigma}^2/2\overline{m}$ avremo

$$B = \frac{1}{2}\,\frac{\rho^2\sigma^2+(1-\rho^2)\,p'\sigma'^2}{\rho m-(1-\rho)\,p'm'} = \frac{1}{2}\,\frac{p'\sigma'^2+\rho^2p''\sigma''^2}{-p'm'+\rho p''m''} .$$

Per $\rho=1$ si ha ovviamente $B=\sigma^2/2m$; per $\rho\to\rho_0=p'm'/p''m''$ ovviamente $B\to\infty$.

25. *Sul termine correttivo.* – Ci resta ancora da dare un cenno sulle questioni che si pongono relativamente al termine correttivo che

sarebbe necessario per tener conto del margine di perdita che rimane insoluto nell'ultimo colpo (nel nostro caso, diremmo: nell'ultimo esercizio). Ci limiteremo a brevi e incomplete indicazioni per quanto riguarda l'aspetto analitico della questione, e cioè i metodi che si potrebbero seguire per cercar di calcolare tale termine correttivo; ci interesserà invece maggiormente, e lo faremo quindi in modo un po' meno affrettato, un esame del modo in cui tale termine correttivo deriva e dipende dalle ipotesi nella formulazione e impostazione del problema, perchè esigono un siffatto esame la considerazioni su questioni pratiche cui dovremo dedicare il prossimo n. 26.

Rifacendoci alle considerazioni dei nn. 19 e 20, si vede che l'espressione esatta della probabilità di rovina P si otterrebbe sostituendo l'espressione approssimata $P = e^{-G/B}$ con l'espressione $\mathfrak{M}(e^{-(G+\Delta)/B})$, ove Δ indichi il margine insoluto di perdita in caso di fallimento. Poichè G è un valore fisso (non aleatorio) possiamo scrivere

$$\mathfrak{M}(e^{-(G+\Delta)/B}) = e^{-G/B}\,\mathfrak{M}(e^{-\Delta/B}) = e^{-\bar{\Delta}/B}\,e^{-G/B} = e^{-(G+\bar{\Delta})/B}$$

con $\bar{\Delta}$ valor medio esponenziale di Δ

$$\bar{\Delta} = -B\log\mathfrak{M}(e^{-\Delta/B}).$$

In prima e seconda approssimazione (per $1/B$ molto piccolo) si ha rispettivamente $\bar{\Delta} = \mathfrak{M}(\Delta)$ e $\bar{\Delta} = \mathfrak{M}(\Delta) - \sigma^2(\Delta)/2B$; sviluppando in serie si ha infatti

$$\mathfrak{M}(e^{-\Delta/B}) = 1 - \frac{1}{B}\mathfrak{M}(\Delta) + \frac{1}{2B^2}\mathfrak{M}(\Delta^2) + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{B}\mathfrak{M}(\Delta) + \frac{1}{2B^2}[\mathfrak{M}^2(\Delta) + \sigma^2(\Delta)] + \cdots,$$

$$-B\log\mathfrak{M}(e^{-\Delta/B}) = \mathfrak{M}(\Delta) - \frac{1}{2B}[\mathfrak{M}^2(\Delta) + \sigma^2(\Delta)] +$$

$$+ \frac{B}{2}\left[\frac{1}{B}\mathfrak{M}(\Delta)\right]^2 + \cdots = \mathfrak{M}(\Delta) - \frac{1}{2B}\sigma^2(\Delta) + \cdots$$

Esiste un caso in cui la determinazione esatta di $\bar{\Delta}$ è immediata: è il caso in cui la distribuzione di probabilità dei numeri aleatori X_h, nel campo negativo ($X_h < 0$), ha andamento esponenziale e simile, ossia in cui la probabilità che $-X_h$ sia compreso tra x e $x + dx$ ($x > 0$) è espressa da $ke^{-\lambda x}$, con k eventualmente diverso per ogni X_h

ma con $\lambda (> 0)$ unico per tutti gli X_h. Allora infatti (e solo in questo caso, come è ovvio) il margine Δ è un numero aleatorio la cui distribuzione di probabilità è sempre la stessa, e precisamente quella di densità $\lambda e^{-\lambda x}$ qualunque sia l'importo (positivo) del fondo di garanzia all'ultimo colpo prima del fallimento. Allora la stessa distribuzione è la distribuzione di probabilità di Δ (non subordinata a detto importo), e si ottiene immediatamente

$$\overline{\Delta} = -B \log\left[\lambda \int_0^\infty e^{-x/B} e^{-\lambda x} dx\right] = -B \log \frac{\lambda}{\lambda + 1/B} = B \log\left(1 + \frac{1}{\lambda B}\right).$$

Come verifica della formula precedente, sviluppando in seconda approssimazione, si trova

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2 B} + \dots ,$$

e infatti

$$\mathfrak{M}(\Delta) = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda \ , \ \sigma^2(\Delta) = \mathfrak{M}(\Delta^2) - \mathfrak{M}^2(\Delta) =$$

$$= \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - 1/\lambda^2 = 2/\lambda^2 - 1/\lambda = 2/\lambda.$$

All'infuori di questo caso il problema della determinazione di $\overline{\Delta}$ si presenta complicato per il fatto che, conoscendo la distribuzione di probabilità di X_h, conosciamo la distribuzione di probabilità per Δ in caso di fallimento all'h-esimo colpo solo *subordinatamente* ad un determinato valore che nell'ultimo istante precedente fosse assunto dal fondo Y_{h-1}. Ciò consente in ogni caso di determinare come confine superiore per $\overline{\Delta}$ il massimo valore che assume, al variare di ξ tra zero e $+\infty$, la media esponenziale della distribuzione residua di $-X_h$ quando si escluda la distribuzione compresa tra $-\infty$ e ξ. Ma per giungere effettivamente alla determinazione della distribuzione di probabilità per Δ e quindi a conoscere $\overline{\Delta}$ occorrerebbe determinare la distribuzione di probabilità per Y_{h-1} che si dovrebbe però fare subordinatamente all'ipotesi che in precedenza il fondo non si sia mai annullato e che divenga nullo o negativo nell'istante seguente, e un tale problema si presenta ben complesso anche nei casi più semplici, come ad esempio supponendo che tutte le X_h abbiano la stessa distribuzione di probabilità o limitandosi a cercare un'espressione asintotica valida quando l'importo iniziale G sia molto grande. Quando concorrano entrambe queste ipotesi semplificative, il risultato dovrebbe potersi ottenere con un adattamento del metodo seguìto per il problema analogo da Lundberg e Cramer, e che li conduce a determinare il valore da essi indicato con α_∞.

Tale metodo si riferisce però alla trattazione nel campo continuo, tipica della teoria del Lundberg, e che corrisponde alla trattazione qui svolta quando si passi al caso limite in cui si suppongano « infinitamente brevi » i successivi periodi chiamati « esercizi ». Corrisponde, in altre parole, al caso in cui si supponga che un esaurimento del fondo di garanzia nel corso di un esercizio determini *ipso facto* il fallimento, senza attendere di vedere se la situazione risulti confermata o sanata alla chiusura dei conti alla fine dell'esercizio. È ovvio che secondo la formulazione nel continuo [27] la probabilità di rovina (per un medesimo portafoglio) non può essere che maggiore; la nostra formula approssimata ci dice che in ogni caso $P = e^{-G/B}$ e pertanto la differenza fra il caso continuo e il caso discreto (e anzi i diversi casi che si possono considerare nel discreto al variare della durata dell'« esercizio ») non può dipendere, come si vede, che dal termine correttivo. Tale influenza dobbiamo esaminare, illustrando così il nesso fra diverse teorie.

Considerando Y come funzione del tempo h nel campo continuo, $Y = Y(h)$, si ha « rovina » secondo la formulazione di Lundberg se Y diviene negativa almeno in un istante h del periodo considerato; secondo la formulazione nel discreto (essa pure del resto studiata dal Lundberg, poggiandosi sempre sulla trattazione nel continuo, e qui affrontata direttamente) occorre invece che Y sia negativa almeno in uno degli istanti $h_1, h_2 \cdots, h_n, \cdots$ corrispondenti alla chiusura di un « esercizio » e cadenti nell'intervello che interessa; usualmente (esercizi di ugual durata H) si tratterà degli istanti $h = H, 2H, 3H, \cdots$, e in particolare $h = 1, 2, 3, \cdots$ prendendo H come unità di tempo. L'aumento della probabilità di rovina che deriva, diminuendo H, dall'infittire i punti obbligati sotto cui la linea $Y(h)$ non deve discendere, corrisponde dunque alla minore dispersione della variazione di Y in un intervallo più breve, e alla conseguente diminuzione del mar-

27) E cioè, secondo la teoria delle « funzioni aleatorie ».

gine di perdita insoluto Δ, o, per meglio dire, della media esponenziale $\bar{\Delta}$ che di esso interessa agli effetti del calcolo di P. Quando H si fa tendere a zero (caso della formulazione nel continuo), $\bar{\Delta}$ può tendere esso pure a zero oppure può non scendere al di sotto di un certo limite; si ha il primo caso quando $Y(h)$ varia con continuità (almeno nel diminuire) cosicchè non può assumere un valore negativo se non avendo attraversato lo zero in un istante precedente, nel quale quindi si sarebbe arrestato il gioco; si ha il secondo caso quando le variazioni (in diminuzione) di Y sono e possono essere brusche, discontinue. L'ipotesi che le variazioni siano continue conduce (come hanno dimostrato il Kolmogoroff e più compiutamente il Lévy) all'unico caso di una funzione aleatoria a distribuzione di probabilità gaussiana, caso studiato da tempo (per esempio dal Bachelier nella sua « teoria della speculazione ») e sul quale si hanno attualmente conoscenze vaste ricavate con svariati metodi. Il caso di variazioni discontinue (o « anche » discontinue, se sono congiunte a variazioni del tipo precedente) conduce alla distribuzione di Poisson per la presenza di punti di discontinuità in intervalli assegnati, e a una distribuzione qualunque per la grandezza del salto in ciascuno di tali punti [28]. Se i salti fossero soltanto positivi si sarebbe nel caso in cui le diminuzioni sono ancora soltanto continue, e in questo caso come nel precedente varrebbe esattamente la formula $P = e^{-G/B}$ per la probabilità di rovina. Ciò non vale più invece nel caso di salti anche negativi, e il caso delle assicurazioni conduce proprio a salti negativi in quanto tali sono i pagamenti dei sinistri, importi finiti la cui perdita si produce in un solo istante. Anzi nella schematizzazioe del Lundberg soltanto le diminuzioni (per sinistri) avvengono in forma discontinua, mentre l'incasso dei premi si considera, con una certa idealizzazione, come un flusso continuo.

Concludendo, un certo margine medio $\bar{\Delta}$ di perdita insoluta (e il conseguente spostamento – sempre in meno – della probabilità di rovina P rispetto al valore $e^{-G/B}$) nel caso delle assicurazioni, si ha già considerando il problema nel continuo causa il carattere discontinuo dei sinistri, e si accresce considerando « esercizi » di durata H via via più lunga per la maggiore dispersione che ha il guadagno (o perdita) nel corso di un periodo più lungo. Da tale influenza di H su

---

28) Cfr. A. KOLMOGOROFF, *Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo* (*Un problema di Bruno de Finetti*), « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », vol. XV, Ser. 6ª, 1° sem., fasc. 10 (e seconda Nota nel fasc. 11), 1932.

$\bar{\Delta}$, e da null'altro, deriva la diminuzione della probabilità di rovina al passare della formulazione nel continuo a quella nel discontinuo e poi al crescere di H, influenza che si manifesta esclusivamente attraverso il « termine correttivo ».

26. *Considerazioni sull'interdipendenza.* – L'interdipendenza fra i rischi conduce in ogni caso a far apparire preferibile, per un ulteriore motivo, la formulazione del problema nel discontinuo. Sappiamo infatti che dobbiamo avere indipendenza stocastica [29] fra i risultati $X_1, X_2, X_3 \ldots$ nelle successive partite; perchè ciò sussista, ogni singolo rischio di un determinato « esercizio » può essere correlato con altri rischi soltanto nel corso del medesimo esercizio, e al limite, se gli « esercizi » sono tempuscoli infinitesimi, nessuna correlazione è possibile. Nel caso corrispondente alla pratica, in cui gli esercizi sono intervalli annuali, può esservi correlazione fra i rischi del medesimo anno, e ciò è sufficiente a far rientrare nella trattazione i più notevoli fattori di correlazione dei principali rami d'assicurazione; ad esempio nelle assicurazioni sulla vita le principali cause di correlazione derivano da fattori meteorologici e dal presentarsi di epidemie, e tali fattori si concludono in un periodo inferiore all'anno, cosicchè (salvo il caso che abbraccino un periodo a cavallo fra due esercizi) non viene intaccata per la loro presenza l'ipotesi di indipendenza fra i rischi e quindi fra i guadagni e perdite di esercizi diversi. Per altri rischi dipendenti da fenomeni a ciclo più lento ciò non sarebbe più vero: ad esempio per l'assicurazione contro la disoccupazione, dipendente da crisi e altri fattori economici le cui ripercussioni perdurano per periodi ben superiori a quello di un anno, sarebbe certamente inadeguato determinare in base alla trattazione precedente la probabilità di rovina corrispondente a un determinato importo del fondo di garanzia, qualora si prenda come durata dell'« esercizio » quella di un anno, e pertanto il calcolo di B si eseguisca in base alla distribuzione di probabilità dello scarto annuo (per riferirci alla prima approssimazione: ponendo $B = \sigma^2/2m$, con σ e m scarto quadratico medio e speranza matematica relativi ad un anno).

È questo l'ulteriore problema accennato dal Medolaghi [30] che fu indotto a distinguere il caso di fenomeni « accidentali » e « ciclici »,

[29] Troppo restrittivo; si legga invece: « indipendenza del livello di rischiosità fra i risultati, ecc. » (per il senso, cfr. le note [25] e [26]).

[30] Cfr. Bibliografia, 3.

proponendo criteri diversi per la commisurazione della riserva di garanzia per i due casi, che dovrebbe basarsi nel primo sugli scarti dei singoli anni, nel secondo sulle loro somme estese ad un opportuno periodo (ciclo). Vedremo che, proseguendo il nostro ragionamento, si giungerà sostanzialmente a confermare il risultato intuito e giustificato mediante considerazioni pratiche dal Medolaghi. Supponiamo infatti che gli incrementi X_h dei successivi esercizi, anzichè indipendenti tra loro, siano correlati positivamente, in misura tanto più tenue quanto più distanti tra loro siano gli esercizi considerati: sia precisamente r_1 il coefficiente di correlazione fra gli X_h di due esercizi immediatamente susseguentisi, $r_2 < r_1$ quello fra due esercizi separati da un anno, e così di seguito sia r_m il coefficiente di correlazione fra X_h e X_{h+m} (qualunque sia h), e la successione $r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots$ sia decrescente (e in pratica sarà da considerare nulla dopo pochi termini, per esempio dopo 3 o 4 nel caso citato dell'assicurazione contro la disoccupazione). Se consideriamo allora come « esercizio » (agli effetti dell'applicazione della trattazione sulle probabilità di rovina) un periodo di n anni, avremo come speranza matematica, semplicemente (e naturalmente), nm anzichè m; per lo scarto quadratico medio invece σ^2 non diverrà semplicemente $n\sigma^2$ come si avrebbe in assenza di correlazione, ma diverrà

$$n\sigma^2 + 2(n-1)r_1\sigma^2 + 2(n-2)r_2\sigma^2 + \cdots + 2r_{n-1}\sigma^2$$

poichè $r_m\sigma^2$ è la speranza matematica di ciascuno dei prodotti $X_h X_k$ con $h-k=m$, e tali coppie sono in numero di $n-m$ (e vanno contate due volte ciascuna). Il valore di B risulta pertanto moltiplicato per

$$1 + 2\left(1-\frac{1}{n}\right)r_1 + 2\left(1-\frac{2}{n}\right)r_2 + \cdots,$$

ossia per $$1 + 2(r_1 + r_2 + r_3 \cdots)$$

se si prende n sufficientemente grande. Si noti che $1 + 2\sum r_m$ rappresenta in un certo modo la durata del « ciclo » nella denominazione del Medolaghi, in quanto dà (se così ci si permette di esprimersi per fissare il concetto) il numero degli anni (precedenti e seguenti un anno determinato) ai quali si estende la correlazione, contando ciascuno con un « peso » pari al coefficiente di correlazione con l'anno dato.

Anche queste ultime considerazioni serviranno a mostrare il carattere assolutamente generale della trattazione svolta nel presente capitolo, e convincere che l'adozione di un tale punto di vista del tutto generale, senza nessuna inessenziale restrizione, significa penetrare nel più vivo del fenomeno, senza perdere nulla dei risultati, potendosi sempre, di eventuali particolarità, tener conto caso per caso. Anche sotto questo aspetto la trattazione che abbiamo ora terminato di svolgere per sommi capi può considerarsi come un principio di realizzazione delle idee esposte dal Medolaghi, che, nella sua conferenza tenuta all'Istituto Nazionale delle Assicurazioni nel 1929, pur ripromettendosi di attenersi in particolar modo al caso delle assicurazioni, soggiungeva testualmente: « ma la teoria del rischio che, allargandone la portata e affermandone senz'altro il valore pratico anche nella denominazione, io preferirei molto di chiamare *teoria delle riserve di garanzia*, dovrebbe applicarsi ad ogni sorta di imprese ».

CAPITOLO QUARTO

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE.

27. *La teoria del rischio e il Calcolo delle probabilità.* – La teoria del rischio – e quindi il problema della determinazione dei pieni, che ne costituisce lo scopo e l'applicazione pratica – si trova in quella zona della matematica attuariale ove tuttora s'incontrano diffuse diffidenze. Terminata ora la trattazione dell'argomento, sembra quindi necessario o almeno assai utile, anche al fine di chiarire concettualmente gli svolgimenti che abbiamo sviluppati, un esame delle ragioni di tali diffidenze, e cioè un'analisi delle diversità di natura dei problemi dalle quali possano derivare e trovare spiegazioni i diversi atteggiamenti rispetto alle questioni concernenti il calcolo di premi, riserve, ecc. da una parte, e dall'altra rispetto alle ricerche attinenti alla teoria del rischio.

In forma leggermente paradossale, si potrebbero così sintetizzare le esistenti diversità: i campi in cui l'applicazione del Calcolo delle probabilità alle assicurazioni non dà luogo a diffidenze sono quelli in cui il concetto di probabilità può in un certo senso sembrare superfluo, o almeno surrogabile colla nozione statistica di frequenza, cui spesso nella mente dei pratici (ed anche in certe trattazioni) la probabilità si ravvicina sin quasi a confondersi; i campi in cui l'applicazione del concetto di probabilità è contrastata sono quelli ove occorre proprio – genuinamente – il concetto di probabilità. Non che si possa ammettere, con tale constatazione, che sia lecito, in un qualunque problema attuariale, prescindere dalla nozione di probabilità senza snaturarlo[31]; si tratta semplicemente di constatare che esiste tutta una categoria di problemi (quali appunto tutti quelli concernenti il calcolo di premi, riserve, ecc.) per i quali si giunge formalmente alla soluzione esatta anche partendo dall'ipotesi snaturatamente semplificativa che il numero dei morti per ogni età debba risultare esattamente conforme a un'assegnata tavola di sopravvivenza, o dall'ipotesi intermedia e manchevole che ciò debba verificarsi con buona approssimazione in forza di un'osservata « regolarità statistica » (che si potrà o meno ricollegare, per spiegarla, al teorema di Bernoulli e con ciò al Calcolo delle probabilità, ma che, essendo presa essa stessa come ipotesi di partenza, svuota poco o molto la nozione di probabilità della sua funzione essenziale). Dal punto di vista matematico, la caratteristica che contraddistingue tale categoria di problemi è più profonda e sostanziale: non si tratta di problemi solo soggettivamente privilegiati in quanto per essi appare più o meno ammissibile, per certe mentalità, un certo tipo di interpretazioni; si tratta dei problemi la cui soluzione è indipendente da qualunque interpretazione concettuale dell'impostazione. E sono, questi, i problemi involgenti, probabilisticamente parlando, null'altro che calcolo di speranze matematiche determinabili in base alla tavola di mortalità (e cioè senza alcuna ipotesi relativa all'indipendenza o interdipendenza dei rischi) ossia, in definitiva, i problemi *lineari*. È noto infatti che il teorema di addizione per le speranze matematiche vale incondizionatamente; inversamente, un numero aleatorio Y funzione dei numeri aleatori $X_1, X_2, \cdots, X_n$, $Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, ha una speranza matematica $M(Y)$ dipendente soltanto dalle distribuzioni di probabilità di $X_1 \cdots X_n$ (e non dall'interdipendenza fra esse) solo nel caso che si tratti di funzione lineare ($Y = a_1 X_1 + + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$)[32]. Le prestazioni di qualunque forma assi-

---

[31] Tale punto di vista ho particolarmente sviluppato in una comunicazione preparata per il Congresso Int. Attuari che avrebbe dovuto aver luogo a Lucerna nel 1940.

[32] Anche tale interessante proprietà – analoga, in un certo senso, a quella di cui alla nota [6] – non mi consta che sia stata dimostrata nè considerata esplicitamente; eccone perciò la dimostrazione. Anzitutto però completiamo e correggiamo il suo enunciato (che nel testo è visibilmente inesatto) come segue: « . . . solo nel

curativa sono combinazioni lineari di prestazioni elementari le cui probabilità sono quelle date dalla tavola di mortalità, ed ecco perchè il calcolo delle corrispondenti speranze matematiche (premi, riserve) costituisce un problema lineare; così pure, ecco perchè la riserva per un intero portafoglio è sempre la somma delle riserve per le singole assicurazioni, qualunque sia l'eventuale interdipendenza dei rischi, e quindi, in particolare, sia nel caso che il numero dei decessi fosse prevedibile con esattezza a priori (correlazione negativa, come nelle estrazioni senza reimbussolamento), che nel caso d'indipendenza o

---

caso che la funzione f si riduca a una somma di funzioni delle variabili separate ($Y = f_1(X_1) + f_2(X_2) + \cdots + f_n(X_n)$); perchè si abbia una dipendenza soltanto dalle speranze matematiche delle $X_1 \cdots X_n$ è poi necessario e sufficiente che le funzioni f_h e quindi anche la f, siano lineari ($f_h(X_h) = a_h X_h + b_h$; $Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$) ».

Per la dimostrazione possiamo limitarci al caso di due numeri aleatori X e Y, e consideriamo due valori qualunque x ed y. Supposto che $\mathfrak{M}[f(X, Y)]$ rimanga invariato mutando l'interdipendenza di X e Y ma non le rispettive distribuzioni, esso dovrà in particolare rimanere invariato quando si aumentino di una stessa massa p le masse concentrate in $(x, 0)$ e $(0, y)$ diminuendo di altrettanto le masse concentrate in $(0,0)$ ed (x, y) (nel caso di distribuzioni continue, si dovrebbe parlare di masse contenute in *intorni* di detti punti, intorni che al limite si renderanno piccolissimi). La variazione che, per effetto di tali spostamenti di masse, subisce $\mathfrak{M}(f)$ è data da

$$p[f(x, 0) + f(0, y) - f(0, 0) - f(x, y)]$$

e per ipotesi tale variazione dev'essere nulla identicamente in x, y. Ne scende che

$$f(x, y) = f(x, 0) + f(0, y) - f(0, 0) = \varphi(x) + \psi(y)$$

e analogamente nel caso di n dimensioni

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n), \qquad \text{c. d. p.}$$

La condizione detta è quindi necessaria; poichè in tal caso

$$\mathfrak{M}[f(X_1, \cdots, X_n)] = \mathfrak{M}[f_1(X_1)] + \cdots + \mathfrak{M}[f_n(X_n)]$$

risulta poi direttamente che l'interdipendenza non influisce sul risultato, ossia che la condizione è anche sufficiente.

Per avere poi una dipendenza soltanto da $\mathfrak{M}(X_1), \cdots, \mathfrak{M}(X_n)$ occorre che $\mathfrak{M}[f_1(X_1)]$ dipenda soltanto da $\mathfrak{M}(X_1)$, ecc.; per ciò occorre e basta la linearità delle f_h, come è evidente (si pensi ad es. che dev'essere $\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, perchè la distribuzione concentrata in $(x+y)/2$ e quella divisa ugualmente fra i due punti x e y, avendo uguale speranza matematica $(x+y)/2$, devono dare uguali speranze matematiche per f).

in qualunque altro. Dovendosi invece trattare di assicurazioni su più teste, si entra già in un campo di problemi non lineari, e infatti la relazione usuale – che esprime la probabilità di sopravvivenza per più teste come prodotto delle probabilità per ciascuna di esse – vale soltanto nell'ipotesi dell'indipendenza: una leggera interdipendenza non modifica però notevolmente i risultati, e ciò giustifica come di tale difficoltà non si soglia preoccuparsi. Passando poi allo studio degli scarti, e cioè all'argomento che ci interessa, l'influenza diviene anche quantitativamente importante, ed ecco i dubbi e le riserve prendere consistenza.

A torto o a ragione ? Dicendo che sono proprio questi i problemi in cui il concetto di probabilità interviene in forma più genuina, ho già implicitamente espresso l'opinione che, in linea di principio, tali dubbi non abbiano ragion d'essere. Ma bisogna riconoscere che, venendo a mancare l'insensibilità dei risultati alle più delicate valutazioni dell'interdipendenza dei rischi, viene in gran parte a mancare la sensatezza di calcoli numerici precisi; tale fatto non va sottaciuto o negato, ma si deve invece osservare che, se nel campo dei calcoli di premi, riserve, ecc., lo scopo pratico del Calcolo delle probabilità si risolve nella possibilità di simili calcoli numerici, nel campo della teoria del rischio le conclusioni che interessano sono per se stesse di carattere prevalentemente qualitativo. Interessa fondare su solide basi teoriche i criteri che si debbono seguire nella pratica, occorre rendersi conto dei concetti che li ispirano e delle ipotesi che li giustificano, è indispensabile imparare a non formalizzarsi di un certo grado di relatività dei risultati dipendenti da sfumature essenzialmente indeterminate nell'impostazione o nelle ipotesi, e a ricordare che (al contrario che per i premi) non ci sarebbe alcuno scopo di calcolare i pieni al centesimo, ma sarebbe grave non possedere e dominare gli argomenti per discutere scientificamente sull'opportunità di certe misure dei pieni.

In tesi generale, direi che anche nel campo attuariale si risente del pregiudizio che dal Calcolo delle probabilità fa esigere volta a volta o troppo o troppo poco: o si pretende che esso fornisca, quasi *more geometrico*, tutte le conclusioni pratiche e le valutazioni numeriche di cui abbiamo bisogno, o si cade nell'eccesso opposto di rinunciare, quando ciò non è possibile, all'aiuto che esso potrebbe e dovrebbe dare alla nostra non infallibile intuizione, per precisare, discutere e correggere i criteri puramente empirici che essa ci suggerisce.

Eppure è stato detto che la teoria delle probabilità non è che *il buon senso ridotto a calcolo*; chi di questa asserzione è veramente convinto, non può non trovare inadeguata una tale concezione restrittiva. Anzichè di *sostituire* i suggerimenti del buon senso con dei metodi astratti, si dovrà piuttosto cercare di basarsi su di essi, e precisare per quanto possibile il ragionamento intuitivo secondo insegna la teoria delle probabilità.

Che sia questo l'indirizzo da seguire, è stato del resto affermato dal Medolaghi trattando proprio del problema del rischio « problema singolare e che ha questo non ultimo merito, che mentre cioè richiede e richiederà forse sempre in parte l'adozione di oculati criteri empirici, si collega per un altro verso alle più alte concezioni della teoria delle probabilità, ed alle più delicate applicazioni dell'analisi ».

28. *Riassunto dei risultati.* – La trattazione svolta e i risultati raggiunti s'ispirano infatti a tali concetti e li confermano. Le discussioni sulla legittimità e l'opportunità dell'applicazione del Calcolo delle probabilità alla teoria del rischio vi sono senz'altro scartate osservando che il dubbio non può riferirsi all'applicabilità del Calcolo delle probabilità per sè stesso, ma eventualmente al modo di tale applicabilità, e cioè alle diverse opinioni che si possono avere riguardo alle probabilità che occorrono nel problema e in particolare riguardo alla indipendenza o interdipendenza stocastica fra i diversi rischi.

Assicurata la possibilità e appropriatezza di un esame dell'argomento basato sulla teoria delle probabilità, non è ancora risolto però neppure il problema dell'impostazione della trattazione, perchè non si tratta di una questione per sè stessa così ben definita da non potersi porre che in un modo univocamente determinato, ma di un argomento che presenta molteplici aspetti che conviene considerare nel loro complesso, salvo a riconoscere dopo raggiunta una visione d'insieme quali siano i punti su cui maggiormente occorre concentrare l'attenzione.

La visione integrale conduce a considerare come elementi del problema tutte le circostanze da cui dipende l'eventualità di un fallimento, e cioè, oltre alla misura dei caricamenti, e allo sviluppo del portafoglio, anche le norme relative ai fondi di garanzia, ecc., e si giunge, ammesso di riuscire a tener conto di tutto ciò, ad esprimere il risultato in forma funzionale, determinando cioè la probabilità di rovina entro un periodo futuro di tempo qualunque.

Per uscire da una generalità tanto spinta da non permettere al problema di delinearsi con sufficiente concretezza, bisogna chiedersi qual'è la conclusione che effettivamente ci preme di raggiungere, o, per meglio dire, come si può concretare e schematizzare, onde meglio afferarlo, lo scopo della ricerca, che consiste nello stabilire nel modo *più opportuno* modalità e limiti della riassicurazione. Si è indotti così a distinguere due aspetti del problema, che effettivamente sono apparsi anche nello svolgimento della trattazione come in larga misura indipendenti l'uno dall'altro: quello dei « pieni relativi » che consiste nel fissare in quale rapporto tra loro debbano venir stabiliti i pieni per le diverse assicurazioni (a seconda della forma d'assicurazione, delle probabilità dei rischi assicurati, ecc.), e quello del « pieno assoluto », che consiste nel determinare ancora – mediante un unico ulteriore parametro – la misura assoluta dei pieni.

Il problema del pieno relativo risulta praticamente indipendente dell'ammontare del fondo di garanzia e dalle norme relative a tale fondo; dipende solo dal confronto fra il margine di utile ed il rischio per ogni singola assicurazione, e lo si può quindi risolvere limitandosi a considerare il problema del rischio nel corso di un unico esercizio, come abbiamo fatto nel primo capitolo. Anche il problema ulteriore che si pone per le assicurazioni sulla vita in dipendenza del fatto che per esse la misura della riassicurazione va fissata all'inizio per tutta la durata futura, si può ricondurre nell'àmbito di tale impostazione. Comunque il problema dei « pieni relativi » appare come un problema di « optimum », e il problema del « pieno assoluto » consiste nell'ulteriore scelta di uno fra tali punti di « optimum ».

Per la commisurazione del pieno assoluto, in relazione all'ammontare dell'esistente fondo di garanzia e alle norme che ne regolano l'alimentazione, l'indice più significativo è dato invece, giungendo all'estremo opposto, dalla probabilità asintotica di rovina quale risulta supponendo di prolungare indefinitamente la durata considerata.

29. *Cenni bibliografici.* – Una lista bibliografica, che certamente sarà lungi dal contenere completamente la vasta letteratura dedicata all'argomento, si trova alla fine del presente lavoro [33]).

---

33) La bibliografia riguarda solo i lavori che si riferiscono direttamente alla teoria del rischio o a questioni ad essa strettamente connesse (i lavori cui dovevo riferirmi per questioni particolari sono invece citati a pie' di pagina). Per la maggior

In questi « cenni » non mi propongo di dare sia pur minimamente dei chiarimenti su di essa in generale, ma solo di specificare cosa, nella presente trattazione, ritengo originale, e cosa sia preso da altri autori.

L'impostazione del capitolo primo si ispira, come punto di partenza, alla trattazione del Tolentino, allargandone però le ipotesi in diversi sensi: nel considerare un diverso margine di guadagno per le singole polizze (in ciò seguendo l'impostazione del Neuhaus), nel tener conto della correlazione (in ciò seguendo le tracce del Dubois, che però non ha affrontato il problema del pieno), nell'esaminare le questioni dei nn. 9 e 10, ecc.

Il capitolo secondo non pretende contenere nulla di originale, salvo le opinioni personali espresse, e l'applicazione del teorema di Hattendorff per un intero portafoglio quale esposta nel n. 13.

Il capitolo terzo tratta della teoria del rischio dal punto di vista di Lundberg, Cramer, ecc., allargandone però le ipotesi e quindi l'applicabilità. Il metodo di trattazione, a carattere prevalentemente sintetico anzichè analitico, cui mi sono attenuto, non è nuovo per sè stesso, essendo ispirato alle trattazioni classiche sul problema della rovina dei giocatori, e particolarmente a quella del Bertrand (Calcul des probabilités, cap. VI). Nuova è però l'applicazione dell'idea–base (che risale a De Moivre) nel campo della teoria del rischio, ciò che ha richiesto anzitutto che tale idea–base (considerata finora come un artificio sfruttabile in un caso particolare) venisse posta nella sua giusta luce e valorizzata nella sua portata generale mettendola in relazione colla moderna teoria dei numeri aleatori e della funzione caratteristica.

Per tale via si giunge non solo a sfrondare la teoria di Lundberg di tutte le ipotesi troppo precise e superfluemente dettagliate, chiarendo così quali siano le condizioni essenziali per la validità dei risultati, ma anche a presentare la trattazione in una forma che si presta direttamente a collegarsi coll'analisi dell'influenza di ogni singola polizza sugli elementi del problema, e quindi al problema della determinazione dei pieni che costituiva lo scopo principale del presente lavoro.

---

parte i lavori elencati sono stati letti o scorsi nella preparazione della presente Memoria; ho ritenuto tuttavia opportuno completare la lista anche con citazioni di lavori (particolarmente i più antichi) di cui trovai solo l'indicazione e riferimenti al loro contenuto in altre pubblicazioni.

BIBLIOGRAFIA

ALTENBURGER, Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.

ARANY, Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.

BACHELIER:

1. *Calcul des probabilités.*
2. *Théorie de la speculation.*

BAPTIST, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.

BERGER:

1. *Zur Theorie der Durchschnittlichen Risikos,* « Blätter für Versicherungs-Math. », I, 1928.
2. *Die Technik der Lebensversicherung,* vol. II.

BOHLMANN:

1. *Lebensversicherungs-Mathematik,* « Enzykl. Math. Wiss. », Bd. I, 2, Lipsia 1900–1904.
2. Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.

BREMIKER CARL, *Das Risiko bei Lebensversicherungen,* Berlin, 1859.

BROGGI UGO, *Matematica attuariale,* Manuali Hoepli, Milano, 1906.

CANTELLI F. P.:

1. *Intorno ad un teorema fondamentale della teoria del rischio,* « Boll. Ass. Att. It. », n. 24, Milano, 1910.
2. *Su due applicazioni di un teorema di G. Boole alla statistica matematica,* « Rendiconti Lincei », vol. XXVI, 1° sem., 1917.
3. *Sulla formula di Hattendorff, ecc.,* « Riv. Ital. di Statistica », anno I, n. 4, 1929.
4. *Un teorema sulle variabili casuali dipendenti che assorbe il teorema di Hattendorff nella teoria del rischio.* « Atti S. I. P. S. », vol. II, 1929.
5. Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.

CRAMER HARALD:

1. *On the Mathematical Theory of Risk,* « Skandia », Stoccolma 1930.
2. Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.

CVENTNIC, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.

DIENGER JOSEPH, *Der mittlere Gewinn oder Verlust bei der Lebensversicherung, ecc.,* « Masius' Rundschau », anno XXVII, Lipsia, 1877.

DUBOIS PIERRE:

1. *Essai d'application ecc.* « Bull. Act. Franç. », 1936.
2. Comun. Congr. Attuari, Parigi 1937.

DUMAS SAMUEL, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.

EKHOLM, Comun Congr. Attuari, Vienna 1909.

ELDERTON, Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.

ESSCHER, *On the Probability Function in the Collective Theory of Risk*, «Skand. Aktuarietidskrift», 1932.
FUHRICH, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.
GULDBERG:
1. Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.
2. Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.
GRUDER, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.
HAGSTROEM, *Remarks on risk theory*, « Skand. Akt. », 1934.
HATTENDORFF KARL, *Ueber die Berechnung der Reserven und das Risiko bei der Lebensvers.* «Masius' Rundschau», anno XVIII, Lipsia 1868.
HAUSDORFF F., *Das Risiko bei Zufallspielen*, « K. Sächs. Ges. d. Wiss. », Lipsia, seduta 13 novembre 1897.
HENDERSON, « Trans. Act. Soc. Amer. », vol. 2, New York, 1905–1906.
HESSELBERG, Comun. Congr. Attuari, Parigi 1937.
HINTIKKA, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.
HOCHART:
1. Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.
2. *Essai d'une théorie du plein*, « Bull. Trim. Inst. Act. Franç. », 1923.
HOPPENOT, *Le plein et les réserves de garantie dans les compagnies d'assurances sur la vie*, « Bull. Trim. Inst. Act. Franç. », 1931.
JACOB, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.
KANNER MORITZ, *Bestimmung der mittleren Risikos bei Lebensversicherungen*, « Journ. Kolleg. Lebensvers. wiss. zu Berlin », Bd. II, 1871.
LACHMUND JULIUS:
1. *Das Risiko verursacht durch die Verschiedenheit der vers. Summen, ecc.*, «Masius' Rundschau», anno XIII, Lipsia, febbraio 1863.
2. *Das Risiko bei der Lebensversicherung*, « Elsners Archiv für das Versicherungswesen », bd. I, 1864.
LANDRÉ CORNEILLE, *Matematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung*, Jena, 1895.
LASHERAS-SANS, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma, 1930.
LAURENT, « Journ. Act. Franç. », vol. 2, Paris, 1873.
LAURIN, *An Introduction into Lundberg's Theory of Risk*, « Skand. Akt. », 1930.
LUNDBERG:
1. Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.
2. *Ueber die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse*, « Skand. Aktuarietidskrift », 1930.
3. *Försä-Kringsteknisk riskutjämning*, Stoccolma 1926.
4. Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.
5. *Some supplementary researches on the collective risk theory*, « Skand. Aktuarietidskrift », 1932.
6. *On the numerical application of collective risk theory*, Stoccolma 1934.
MACK MAX, *Das Risiko bei Lebensversicherungen*, « Ehrenzweigs Assekuranz Jahrbuch », anno XII, Vienna, 1891.
MEDOLAGHI:
1. *Di una teoria nuova del rischio*, « Boll. Ass. Ital. Attuari », 1908.
2. Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.
3. *Il rischio nelle assicurazioni.* « Atti Ist. Naz. Assicur. », 1929.

MEIDELL, Comun. Congr. Attuari, Parigi 1937.

NEUHAUS:

1. *Ueber die Berechnung der Selbstbehalte bei Lebensversicherungen*, «Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen», Berlino, 1936.

2. *Sulla determinazione dei pieni di conservazione nelle assicurazioni sulla vita*, «Giorn. Ist. It. Attuari», anno VIII, n. 4, 1937.

RADTKE P., *Die Stabilität der Lebensversicherungs-Anstalten*, «Zeitschr. gesamte Vers. Wissensch.», Bd. 3, Berlin, 1903.

RAEDELL CARL, *Vollständige Anweisung die Lebensfähigkeit von Versicherungs-Anstalten zu untersuchen*, Berlin, 1857.

RIETZ, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.

ROTHANGE, Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.

SCHOENWIESE, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.

SMOLENSKY:

1. Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.

2. Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.

SPRAGUE, *On the Limitation of Risks*, 1866.

STRUVE JAKOB, *Ueber das Risiko der Kasse bei Versorgungsanstalten*, Altona, 1803.

TAUBER:

1. Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.

2. *Bedenken gegen das Aequivalenzprinzip in der Risikotheorie*, «Das Versicherungsarchiv», 1934.

TETENS JOHANN NIKOLAUS, *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften*, 2 parti, Lipsia, 1785-86.

TOLENTINO G.:

1. *Sul pieno di conservazione nell'assicurazione vita*. «Atti II Congr. Naz. Sc. Assicuraz.», Trieste, 1932.

2. Comun. Congr. Attuari, Parigi 1937.

VAJDA, Comun. Congr. Attuari, Stoccolma 1930.

WAGNER, *Das Problem vom Risiko*, Jena, 1898.

WITTSTEIN THEODOR:

1. *Das mathematische Risiko der Versicherungs-Gesellschaften, ecc.*, Hannover, 1885.

2. *Weitere Folgerungen, ecc.* «Ehrenzweigs Assekuranz Jahrbuch», anno VIII, Vienna, 1887.

WOLD, Comun. Congr. Attuari, Parigi 1937.

ZALAI, Comun. Congr. Attuari, Vienna 1909.

ZECH, *Ueber das Risiko bei Lebensversicherungen*, Tubingen, 1861.