Bruno De Finetti

Il Previsiometro: presentazione e spiegazione in forma elementare

estratto dal quarto numero
della rivista «studi di mercato» - *ottobre 1968*

Soc. A. B E. T. E. - Roma

1. *Di cosa di tratta?*

Il nome « Previsiometro » è nuovo: compare per la prima volta nel titolo del presente scritto. Ma l'argomento non è nuovo (benché piuttosto recente); mancava una denominazione semplice, e la sua introduzione appariva desiderabile in ispecie per una trattazione volutamente semplice, quale è la presente.

Non si tratta di uno strumento di misura se non in senso alquanto figurato; più propriamente potremmo dirlo un procedimento di misura. E l'oggetto della misura è costituito dalle previsioni, nel senso di valutazioni (*soggettive*) di probabilità da parte di un dato individuo, riguardanti cose e fatti riguardo ai quali egli si trova in stato di incertezza (ossia: non ne è informato, o lo è solo parzialmente).

Il termine « *soggettivo* », inserito sopra tra paretensi, allude appunto al fatto che si tratta di valutazione concernente il grado di fiducia (*degree of belief*) di un dato individuo. L'averlo posto tra parentesi dipende dal fatto che, per i soggettivisti (come lo scrivente) tutte le probabilità sono soggettive (esprimono opinioni personali, anche se a volte basate su dati più o meno oggettivi), cosicché la precisazione è pleonastica e superflua. Ma, per altri, può darsi che certe probabilità (queste o quelle a seconda di diversi punti di vista) sembrino doversi considerare « oggettive », e non è qui il caso di contestare questa tesi (come fatto fin troppe volte altrove).

Il procedimento che presentiamo, benché abbia validità assolutamente generale, è infatti particolarmente importante e necessario nei casi di quelle valutazioni che tutti certamente direbbero « soggettive », come, ad esempio, quelle riguardanti previsioni di fatti economici o politici, del comportamento di un dato individuo in date circostanze, di risultati di elezioni o di gare sportive o di imprese spaziali o di esami e via dicendo.

2. *Previsioni e Decisioni*

Ripetiamo: *previsione* significa (nell'uso che facciamo di tale termine) un'attribuzione di probabilità alle varie alternative possibili. E lo ripetiamo per far notare che si tratta di cosa del tutto diversa dalla *predizione*, intesa (questo è l'uso che riteniamo vada riservato al vocabolo) come indicazione di un'unica tra le alternative possibili come « quella che si verificherà ».

Lo scopo concreto della previsione è, sostanzialmente, quello di guidare nelle *decisioni*. La teoria delle decisioni è quella che insegna a confrontare la vantaggiosità di diverse decisioni — ed in particolare quindi a scegliere la migliore di tutte — in relazione alla probabilità e alla desiderabilità delle diverse conseguenze per noi rilevanti. Per precisare tale formulazione occorrerebbe introdurre la nozione di « utilità » e quindi di « utilità sperata », dicendo che è questa la grandezza da massimizzare per ottenere la decisione ottima. Basti, qui, tale cenno, verosimilmente sufficiente per dare un'idea del concetto anche a chi non lo possedesse o non ne avesse che un'idea vaga; aggiungiamo soltanto — perché di ciò avremo bisogno — che nel caso di conseguenze consistenti in guadagni e perdite di entità non rilevante l'utilità si può praticamente identificare col valore monetario e l'utilità sperata con guadagno sperato (ossia la previsione, o « speranza matematica », del guadagno monetario).

Per un individuo che si comporta coerentemente (cioè: capace di avvertire le contraddizioni che la teoria delle decisioni insegna ad evitare, e attento a non cadere in tali errori), la decisione dipende dalla previsione (nel modo detto), ed è, anzi, l'unico vero elemento *osservabile* per risalire alle opinioni di un individuo (alle sue previsioni, ossia valutazioni di probabilità). Assai meno impegnativa è infatti un'asserzione verbale (« secondo la mia opinione la probabilità di quel certo fatto è del 28% »), slegata da ogni addentellato pratico (decisione, scommessa, ecc.).

E' chiaro, pertanto, che un procedimento inteso (come quello che vogliamo indicare) a fornire una conoscenza delle previsioni (ossia valutazioni di probabilità) di un dato individuo, per essere *operativo* (e non meramente *verbale*), dovrà basarsi sul comportamento di tale individuo nella scelta di una fra un opportuno insieme

di decisioni offertegli, così che la sua opinione ne risulti individ
(beninteso: nell'ipotesi che il suo comportamento sia coerente).

Di siffatti procedimenti è ovviamente possibile crearne con l
grado di arbitrarietà (e sarà facile vedere come, pur senza insis
su dettagli). E tutti potrebbero venir chiamati *previsiometri*.

Quello su cui ci soffermeremo è soltanto il più semplice.

3. *Una spiegazione semplice*

Cominciamo subito coll'illustrare tale procedimento sem
nella forma più semplice, cioè mediante uno schema numerico
questa, infatti, l'unica novità della presente esposizione (e vedi
in seguito il legame con quella più formale usata altrove). Oltre
più semplice, la spiegazione risulterà anche, in certo senso, più
creta, o, se si vuol dire così, « materializzata ».

Si tratti di voler conoscere la probabilità che un certo indiv
attribuisce ad un evento E (per es., al fatto che una certa pa
di merce di cui è in attesa gli pervenga entro il termine mas
convenuto). Per accertare se egli la valuta a più o meno di un
livello, per es. del 28%, si può pensare di offrirgli al prezzo di
lire un biglietto che ne vince 1000 se E si verifica; vi sono obie
contro un procedimento così semplicistico, e del resto poco co
sivo, ma, traducendolo in forma più sistematica, le obiezioni per
consistenza.

Come prima idea, si potrebbe pensare di offrire 100 bigl
ciascuno del valore di L. 1000 se E si verifica, ai diversi prez
L. 5, 15, 25, ..., 985, 995; chi valuti la probabilità di E al
comprerà i primi 28 biglietti con prezzo inferiore a L. 280 (ci
L. 5 a L. 275) e non gli altri. Oppure (volendo una precisione
giore) offrire 1000 biglietti, ciascuno del valore di L. 10.000 se
verifica, ai prezzi di L. 5, 15, 25, ..., 9975, 9985, 9995 (e
comprerebbe i primi 280 con prezzo inferiore a L. 2800 (ci
L. 5 a L. 2795). Volendo, si potrebbe passare a 10.000 o 10
biglietti, e così via.

Senza alterare il concetto, si può modificare lo schema in
da eliminare l'evidente asimmetria: nel caso di probabilità alte
beneficia di molti biglietti a prezzo inferiore. Per ottenere la
metria basta pensare di offrire solo i 50 biglietti di prezzo da l
in su, con valore di L. 1000 se si verifica E, ma inoltre altre
ai medesimi prezzi, con valore di L. 1000 se si verifica *non*-E.
modo, chi valuti la probabilità di E al 28% acquisterebbe i b

a favore di *non*-E con prezzo inferiore al 72% (cioè: quelli di prezzo da L. 505 a L. 715) e basta. Altrettanto per ogni probabilità inferiore al 50%. Per valutazioni superiori (per es. 63%), analogamente, uno acquisterebbe i biglietti a favore di E con prezzo inferiore al 63% (cioè: quelli di prezzo da L. 505 a L. 625) e basta. Per la valutazione di 50% non verrebbe comperato nessun biglietto di nessuna delle due specie.

Con altra alterazione inessenziale si può supporre che, a tale schema, si aggiunga o tolga un pagamento fisso, ed è opportuno fissare tale importo in modo che il risultato della scommessa sia sempre un valore da zero in su oppure da zero in giù. Poiché la massima spesa (per comperare tutti i 50 biglietti a favore di E, o viceversa) è di L. 37.500 (50 volte le semisomma di 505 e 995), basta supporre che per ogni valutazione uno riceva tale importo affinché, nell'ipotesi più sfavorevole (compera tutti i biglietti a favore di E e riesce *non*-E, o viceversa) il suo guadagno sia *zero*; nell'ipotesi più favorevole (compera tutti i biglietti a favore di E e riesce E, oppure viceversa) il guadagno è di L. 50.000 (50 biglietti vincenti L. 1000 ciascuno; costo pagato).

Se invece si impone un pagamento di L. 12.500 (50.000-37.500) la situazione si inverte: si ha sempre una perdita, o *penalizzazione*, che nell'ipotesi più favorevole è nulla, e nella peggiore raggiunge L. 50.000.

In entrambi i casi potrebbe convenire raddoppiare gli importi, per avere il massimo tondo (L. 100.000); si perderebbe il vantaggio di avere tondo l'importo dei singoli biglietti (L. 1000) e la corrispondenza del loro prezzo alla probabilità (per es. L. 625 a probabilità 62,5%). La cosa è inessenziale; ci limitiamo a segnalarla.

4. *Alcune osservazioni*

Benché irrilevanti rispetto a un'impostazione teorica, le varianti considerate non sono tali dal punto di vista psicologico, dal quale possono sempre derivare fattori di distorsione per le valutazioni. Ad es., una certa inerzia potrebbe indurre a « non fare nessuna scommessa » (se, come nei primi due esempi, scegliere p = 0 e rispettivamente p = 1/2 si può interpretare in quel modo). I pagamenti fissi eliminano tale circostanza, ma tuttavia l'effetto sembra probabilmente raggiunto in modo più efficace nel caso della penalizzazione. E' plausibile infatti che, nel caso opposto, molti sarebbero tentati di pensare che non val la pena di sottilizzare per fare il miglior uso di un importo ricevuto in regalo (mentre un maggior impegr viene in genere sentito quando si tratta di evitare una perdita, bencl la differenza tra i due casi sia solo apparente).

5. *La formulazione abituale*

La precedente formulazione del procedimento (in termini somma di scommesse accettate da un individuo) serve allo scopo espl cativo diretto; la formulazione più concisa, usata abitualmente altre occasioni, consiste invece nell'indicare il risultato globale.

La esprimeremo riferendoci al caso della penalizzazione (ch per i motivi detti, sembra il più significativo). E vediamo pertan quale sia la penalizzazione, per chi abbia valutato a p la probabili di E, nei due casi in cui E si verifica o non si verifica.

Nel caso p=50% la penalizzazione è 12.500 (in entrambi casi, che, del resto, sono uguali per simmetria). Per p=51% c in più la spesa di 505, e la penalizzazione è 12.500 + 505 = 13.0(nel caso *non* E mentre è 13.005 — 1000 = 12.005 nel caso E (cui c'è la vincita di 1000, cioè una diminuzione di penalizzazione 1000). Così si può procedere via via passando al 52%, 53%, ecc.: tratta sempre di aggiungere un termine in progressione aritmetica, si vede senz'altro che la penalizzazione risulta 50000 $(1\text{-}p)^2$ se verifica E e 50000 p^2 se si verifica *non*-E.

Basti constatarlo sulla semplice tabellina dello schema in c si offrano solo 10 biglietti da L. 10000 ciascuno ai prezzi di L. 5.50 6.500, 7.500, 8.500, 9.500 (sia a favore di E che di *non*-E), p penalizzazione fissa di L. 12.500 (corrispondente al valore p=50%

p.		Penalizz. non-E	△	Penalizz. E		1
50%		12.500	0	12.500		50
60%	+ 5.500	18.000	10.000	8.000	— 4.500	40
70%	+ 6.500	24.500	20.000	4.500	— 3.500	30
80%	+ 7.500	32.000	30.000	2.000	— 2.500	20
90%	+ 8.500	40.500	40.000	500	— 1.500	10
100%	+ 9.500	50.000	50.000	0	— 500	0
1-p		Penalizz.	— △	Penalizz.		

o da p=50% a p=60% la penalizzazione per il caso la 12.500 a 12.500 + 5.500 = 18.000 e quella per il ifferisce di 10.000 in meno, 18.000 — 10.000 = 8.000 risce in meno di 4.500 rispetto a 12.500); ciò si vede nel le due prime righe, e vale analogamente per le altre. Per inferiori al 50% basta leggerli a destra (e scambiare E ne indicato nella riga di dicascalie inferiore.

o varrebbe nel caso di 100 e 1.000 biglietti, ecc.; 50.000 $(1-p)^2$ e 50.000 p^2, che nella tabellina preceden- per i p multipli di 10%, aumentando i biglietti a 100 per tutti i multipli di 1%, con 1.000 per i multipli di e si ammette di usare valori qualunque (non arroton- efissato numero di cifre decimali) la formula è valida enza limitazioni.

zione meccanica

la esprimente la formulazione abituale ha essa pure una e significativa, sebbene non direttamente connessa alle scommessa. Si tratta invece di un'interpretazione mec- ttavia semplice e familiare agli statistici.

i di decisione, il procedimento si esprime, riferendoci ulazione, come segue:

scelta fra tutte le decisioni D_x (*con* x *reale*, $0 \leq x \leq 1$), *dare una penalizzazione* $(1-x)^2$ *se si verifica* E *ed* x^2 *non*-E, *chi attribuisce ad* E *probabilità* p *deve scegliere* p (*che rende minima la penalizzazione sperata*).

a previsione della pesalizzazione (speranza matemati- lizzazione, o penalizzazione sperata) per chi valuta la p e sceglie la Decisione D , risulta:

$(1-p)\,x^2$

$(1-p)-(x-p)]^2+(1-p)\,[p+(x-p)]^2=$
$1-p)^2-2p\,(1-p)\,(x-p)+p\,(x-p)^2+$
$-p)\,p^2+2\,(1-p)\,p\,(x-p)\quad(1-p)\,(x-p)^2=$
$1-p)+(x-p)^2;$

il valore minimo, p (1 — p), prendendo x = p in uadrato si annulli).

iclusione è molto più espressiva se si pone attenzione neccanico. La penalizzazione prevista è il momento, ito x, di due masse 1-p e p poste rispettivamente nei il cui baricentro è in p (p.1 + (1 — p)(0 = p); per renderla minima si deve prendere x = p perché il momento è minimo rispetto al baricentro.

Nella statistica, tale risultato dice che il valor medio è anche il valore rispetto a cui è minimo il momento di second'ordine (ossia lo scarto quadratico medio, sua radice). E ciò permette di giustificare direttamente il procedimento estendendolo al caso di un numero aleatorio qualunque (per evitare sottigliezze, limitato).

Sia X un numero aleatorio, e si voglia valutarne la previsione (speranza matematica, valor medio) P (X). Si può pensare di determinare $\overline{X}$ = P (X) come separazione tra gli $x < \overline{X}$ per i quali il guadagno aleatorio X viene preferito a un guadagno certo $\overline{X}$, e quelli $> \overline{X}$ per i quali avviene il contrario. Si può, seguendo tale concetto, considerare una successione di valori x_i (per es. equidistanti) pensare di offrire tante scommesse (per es. di importo uguale) sul fatto che X risulti $\geq x_i$; un individuo accetterà tutte le scommesse con x_i inferiore al valore $\overline{X}$ che egli attribuisce alla previsione di X (e la sua scelta permetterà di dire che per lui P (X) è compreso nell'intervallo $(x_i, x_i + 1)$).

Ma, con le ipotesi fatte (x_i equidistanti, importi uguali), ci si riconduce (come nel caso degli eventi) a una somma di scommesse equivalente ad una, globale, per cui la penalizzazione è $(X - x)^2$ se il valore scelto per la decisione D_x è un x qualunque; e conviene prendere x = P (X) nella propria valutazione.

7. *Osservazioni*

L'ultima affermazione è esatta, evidentemente solo se si ammettono tutti i valori x anziché una successione (tutto va come nel caso degli eventi).

La nuova interpretazione mostra poi facilmente come il procedimento si possa generalizzare: modificando la successione delle x_i (per es. non più equidistanti) o gli importi (pesi) delle relative scommesse, si ottengono metodi equivalenti ai fini della valutazione. La differenza è che invece di una funzione quadratica (geometricamente, una parabola) si può prendere come riferimento una qualunque funzione convessa.

Non è il caso di dilungarsi qui in chiarimenti; l'indicazione, di per sé insufficiente per la comprensione a chi non sa di cosa si tratti, ha solo lo scopo di segnalare un fatto che potrà esser trovato altrove.

8. *Campi di applicabilità*

Sono numerosi e svariati i campi in cui l'impiego di metodi del genere — l'impiego di un previsiometro, per usare il termine suggerito — potrebbe e dovrebbe trovare larga applicazione.

Molte volte si interpellano esperti, e la loro risposta non può avere un significato preciso se non in termini di valutazione di una probabilità soggettiva. Esempio importante (cui si riferisce un interessante libro di Grayson; cfr. Bibl.) è quello del parere di un geologo interpellato sulle prospettive di trovare petrolio con una perforazione in un dato punto. Il problema è: come interessare l'esperto d esprimere genuinamente il suo pensiero? Molti sistemi di inte-essamento rendono vantaggioso per lui consigliare la perforazione (o iceversa) e quindi tendono a distorcere la sua risposta. Il sistema in-icato, viceversa, se ben compreso, induce a dare la risposta corretta.

Un caso analogo si ha per le previsioni meteorologiche (cfr. ltra citazione nella Bibl.,); diversi meteorologici, in base ai medeimi dati, esprimono le loro valutazioni per la probabilità di diversi tati del tempo in un dato luogo ed istante. Il confronto fra le pena-zzazioni loro attribuite dal previsiometro può dare una base per onfrontare il grado di competenza od abilità dei singoli pronosticatori.

Altre volte, per certe circostanze inerenti a problemi economici, di Ricerca operativa, la valutazione della probabilità va lasciata lla persona che s'interessa alla situazione da studiare e che deve rendere la decisione (il « Decision-maker »). Egli ha interesse a dare risposta esatta (cioè ,esprimente esattamente la sua opinione persoale), ma può riuscirgli difficile tradurre una sensazione qualitativa una valutazione quantitativa, numerica. Anche questo aspetto ova giovamento mediante l'uso del previsiometro, o, meglio, con allenamento e la consuetudine al suo uso.

Per tale motivo l'impiego del previsiometro è di per sé istruttivo d utile anche se applicato a previsioni che sono o possono apparire tili o irrilevanti, come nel caso di risultati sportivi. Esperimenti no stati fatti e vengono fatti con riferimento a campioni di calcio.

L'introduzione nella scuola di un siffatto addestramento risponerebbe a una delle esigenze che dovrebbero essere più sentite: la eazione di una mentalità probabilistica. E' cosa diversa da un'istruone in (sia pur rudimenti) di calcolo delle probabilità: è un prequisito necessario per tale eventuale aggiunta, ma è qualcosa che rebbe non meno necessaria anche come integrazione delle facoltà tuitive di ogni individuo anche sprovvisto di qualsiasi particolare truzione del genere.

Nella scuola potrebbero essere adatte sia applicazioni a carattere ricreativo, come nell'esempio delle previsioni calcistiche, sia applicazioni di effettivo interesse scolastico. Si tratterebbe di usare un sistema di risposte probabilistico negli esami tipo test », ossia questionari con numerose domande, per ciascuna delle quali vengono indicate un certo numero di alternative. I sistemi di risposta usuali (come segnare l'alternativa ritenuta esatta, oppure segnarla od omettere ogni segno in caso di dubbio, oppure tagliare quelle ritenute certamente false, ecc.) esprimono solo imperfettamente lo stato di conoscenza dell'esaminando, e, quel che è forse ancor peggio, obbligando più o meno al « guessing » (cioè al « tirare a indovinare »).

Il sistema probabilistico consisterebbe invece nel chiedere, per ogni alternativa, l'indicazione della probabilità che il soggetto attribuisce al fatto che sia quella esatta. Applicando il procedimento di penalizzazione descritto, si avrebbe una graduatoria che terrebbe conto in modo completo del grado di conoscenza o incertezza ecc. di ciascuno. E si raggiungerebbe, inoltre, l'abitudine a misurare i gradi di probabilità e a pensare probabilisticamente.

9. *Cenni su altre pubblicazioni*

Chi volesse approfondire gli argomenti esposti qui in modo elementare e per sommi capi, potrebbe trovare qualcosa di più in diversi altri scritti.

L'idea sembra sia stata esposta per la prima volta in:

Masanao Toda, *Measurement of intuitive probability by a method of game,* Japanese Journal of Psychology, 22, 29-40 (1951).

J. Mc Carthy, *Measures of the value of information,* Proc. Nat. Acad. Sciences, 42, 654-655 (1956).

Dopo conversazioni con L.J. Savage (che mi dette notizia di tentativi diversi, non concretati; non di quelli sopra citati di cui non avevamo notizia) sviluppai considerazioni del genere che pubblicai in vari luoghi, tra cui principalmente:

La matematica per le applicazioni economiche (vol. in collab. con F. Minisola), ed. Cremonese, Roma, 1961.

Does it make sense to speak of 'good probability appraisers'? nel volume The Scientist Speculates: An Anthology of partly-baked Ideas », editor I. J. Good; articolo n. 112, pp. 357-364; ed Heinemann. Londra. 1962.

Methods for discriminating levels of partial knowledge on a test item, The British Journ. of Math. and Statistical Psychology, 18, I, 87-123 (1965).

La probabilità: guida nel pensare e nell'agire, pubbl. dell'Ist. Sup. Scienze Sociali, Trento (1965).

Tra gli scritti di altri autori aventi attinenza con l'argomento basti citare (perché menzionati incidentalmente nel testo):

G. J. Grayson jr., *Decision under Uncertainty: Drilling decisions by Oil and Gas Operators*, vol. ed. Harvard Univ., Cambridge (Mass.), (1960).

Epstein, E.S. & Murphy, A. H., *A note on attributes of probabilistic predictions and the probability score*, Journ. Appl. Meteorology, 4, 297-229, (1964).

BRUNO DE FINETTI