ALCUNE OSSERVAZIONI IN TEMA DI «SUDDIVISIONE CASUALE»

BRUNO DE FINETTI

SUNTO. — Osservazioni sul significato di «suddivisioni casuali» e sulla equivalenza di alcune formulazioni. Generalizzazione di un teorema di Ghizzetti–Roma. Questioni e risultati dipendenti dalla scambiabilità, dall'ordinamento, da metodi di scelta più generali. Cenni ad altri problemi collegati.

La lettura dell'articolo su questo argomento del prof. Ghizzetti e della dott. Roma [1] mi aveva indotto a cercare qualche interpretazione diretta, geometrica o probabilistica, del principale risultato ivi stabilito, che avrebbe potuto senz'altro venirvi inserita nel testo o in appendice. Essendo sembrato più opportuno ai detti Autori che sviluppassi quelle considerazioni a parte, ed essendo apparso da loro ricerche che probabilmente anche molte questioni elementari in argomento non sono state tuttora esplicitamente trattate e risolte, ho aggiunto a quei primi suggerimenti d'interpretazione alcune diverse considerazioni. Mi è sembrato infatti che – come avviene per molte questioni elementari di probabilità – s'incontrino anche in questo caso spunti per osservazioni interessanti e istruttive, non fosse che per essere utilizzate e sviluppate a titolo di esercitazione.

Alcune osservazioni preliminari sul significato di «suddivisioni casuali» e su dei metodi per ottenerle (svolte nei nn. 1–3) consentiranno di presentare in seguito diverse interpretazioni più o meno significative e appropriate per le singole questioni.

Di ciò si farà quindi uso anzitutto (n. 4) per dare dimostrazioni significative, in senso geometrico e in senso probabilistico, di un risultato che generalizza quello dato (come formula 2.6) nel lavoro di Ghizzetti–Roma.

---

[1] A. GHIZZETTI e MARIA SOFIA ROMA, *Calcolo di alcune probabilità relative alla suddivisione casuale di un segmento in n parti*, «G.I.I.A.», 1964, N. 1.

Per ulteriore bibliografia sull'argomento rinviamo, come quegli AA., alla nota di D. A. DARLING, in «Annals of Math. Statistics», 1953.

Verrà poi richiamato il significato e il ruolo della « scambiabilità » nell'argomento in oggetto (n. 5), e si considereranno infine dei problemi, sempre relativi al medesimo caso, nei quali la scambiabilità più non sussiste. Precisamente, verranno accennati (nei nn. 6–7) i problemi che si pongono per le parti della suddivisione supposte ordinate secondo grandezza, oppure (nel n. 8) prescelte con metodi che diano a ciascuna di esse probabilità proporzionale alla grandezza (o comunque funzione di essa). In relazione al penultimo argomento verrà riportato un recente risultato di L. Mancini [2] che vi si ricollega e che mostra la possibilità di estensioni.

1. – Sul significato di « scelta casuale ».

È opportuno ricordare anzitutto che il termine « casuale » viene impiegato, nel calcolo delle probabilità (e prescindiamo ovviamente dall'uso comune o in altri campi), in due accezioni ben distinte. Si dice a volte « casuale » semplicemente nel senso di *aleatorio*, ossia *non certo*, indipendentemente dalla considerazione di una distribuzione di probabilità o qualunque essa sia. Altre volte invece s'intende designare come « casuale » (parlando ad esempio di « scelta » a caso, o casuale) ciò che si riferisce ad una determinata distribuzione di probabilità particolarmente semplice, consistente in genere nella « uguale probabilità » nel caso di un numero finito di « casi possibili » e di « densità costante » nel caso continuo. È ben noto che dicendo così si è lungi dal dare un significato univoco (e a rigore dal dare un significato qualunque) alla locuzione; nel caso discreto si possono intendere enumerati in diversi modi i « casi possibili » (ad esempio come urna contenente 100 palle tra bianche e nere con composizione « a caso » si può intendere che le palle bianche possano essere $0, 1, 2, h, \cdots, 100$ con probabilità $1/101$ per ogni valore, oppure con probabilità $\binom{100}{h} 2^{-100}$ essendo ugualmente probabili tutti i 2^{100} modi di scegliere 100 palle bianche e nere, o in mille altri sensi più o meno naturali); nel caso continuo, dire « densità costante » significa solo che la distribuzione di probabilità è quella stessa che si assu-

[2] Luigi Mancini, *Problemi di ordinamento e misurazione mediante confronti*; tesi di laurea alla Facoltà di Economia e Commercio dell'Univ. di Roma, discussa il 23 nov. 1963. Ringrazio il dott. Mancini anche per il disegno delle figure per il presente articolo (di cui le due ultime tratte dalla sua Tesi).

me come « misura » nella rappresentazione geometrica adottata (rappresentazione e misura che possono entrambe scegliersi ad arbitrio, seppure in genere ne esista una od alcune più spontanee e opportune: si ricordino i noti esempi – cosiddetti « paradossi » – sulle probabilità geometriche, ad esempio per la « scelta a caso » di una corda in un cerchio) [3].

Per evitare equivoci, è pertanto opportuno far risaltare bene, ovunque sia necessario, se il termine « casuale » s'intende nella prima o nella seconda accezione; per mio conto anzi preferisco (e vorrei suggerire) l'uso costante di *aleatorio* (o altri termini) nel primo caso, in luogo di *casuale* (salvo al più in frasi generiche come « fenomeni che si presentano in modo casuale », da intendersi come spiegazioni discorsive prive di precisione tecnica) [4]. E nel secondo caso occorre precisare di volta in volta quale sia la particolare distribuzione cui si vuole alludere, in un dato esercizio o capitolo, quando si usa per brevità la locuzione di « scelta a caso ». Tale precisazione può essere *sottintesa* quando si presume che il lettore indovini senza ambiguità quel che si vuol dire, ma non *soppressa*, nel senso di ritener lecito pensare che la locuzione abbia mai in sé e di per sé un significato qualsiasi che renda superflua ogni precisazione.

Ciò merita d'esser sottolineato in generale, e andava comunque premesso per riferirci in particolare al nostro caso e ad alcuni aspetti che faranno riprendere tali considerazioni.

2. – Sul significato di « suddivisione casuale ».

Oggetto del presente studio sono le suddivisioni di una grandezza, che assumiamo unitaria, in un dato numero n di parti, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ($x_h \geq 0$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$). Ogni partizione può pensarsi pertanto rappresentata da un punto P del simplesso a $n-1$ dimensioni, determinato da n punti (vertici) $V_1, V_2, \cdots, V_n$, rispetto ai quali P abbia coordinate baricentriche $x_1, \cdots, x_n$; se il simplesso è regolare (equilatero) le x_h hanno anche il più immediato significato

[3] Se la si sceglie scegliendo « a caso » la distanza dal centro, oppure il centro della corda entro il cerchio, oppure i due punti sulla circonferenza che congiunge, (ecc.), si hanno distribuzioni diverse (come riportato in molti trattati, per esempio in quello di Czuber).

[4] Così ad esempio, per questo ed anche altri motivi, trovo preferibile parlare di « numeri aleatori » (e « punti aleatori », ecc.) anziché di « variabili casuali ».

metrico di distanze dalle n facce (assumendo come unità l'altezza), come è ovvio nel caso di $n = 3$ (triangolo, ved. figg. 1-2-3-4) ed $n = 4$ (tetraedro, ved. fig. 5), per non dire del caso banale di $n = 2$ (segmento). Nulla cambia, in sostanza, adottando qualunque altro sistema di coordinate ottenuto da una trasformazione lineare, e in particolare (caso che interessa notare) prendendo $z_1 = x_1$, $z_2 = x_1 + x_2$, $z_3 = x_1 + x_2 + x_3, \cdots, z_{n-1} = x_1 + \cdots + x_{n-1}$ (e, volendo, $z_n = 1$), caso nel quale le z_h sono $n - 1$ numeri qualunque tali che $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \cdots \leq z_{n-1} \leq 1$.

Considerare suddivisioni *aleatorie* significa considerare aleatorio il punto P, ossia numeri aleatori le sue coordinate $X_1, \cdots, X_n$ oppure $Z_1, \cdots, Z_{n-1}$ (soggette alle predette restrizioni per le x_h e z_h)[5]. Una suddivisione aleatoria potrà avere una qualunque distribuzione di probabilità nel simplesso (in particolare ad esempio ammettere una densità, od essere concentrata in punti, su linee, ecc.).

Il caso che consideriamo specificamente è quello della suddivisione *casuale*, nel senso che, per riferirci anzitutto alla definizione usata nel lavoro di Ghizzetti-Roma, introdurremo per ora in base a quello che chiameremo « criterio (0) »:

(0) la distribuzione di probabilità nel simplesso ha densità costante, ossia dà sempre probabilità proporzionale alla misura (area, volume, . . .) della corrispondente regione per il punto rappresentativo P.

Sembra opportuno indicare altre proprietà atte a caratterizzare la medesima distribuzione, ossia altre definizioni di « suddivisione casuale » che si dimostreranno equivalenti, sia perché tali proprietà risulteranno volta a volta più adatte come punto di partenza per date conclusioni, sia perché illustrano in modo più diretto il significato probabilistico delle circostanze altrimenti presentatesi attraverso considerazioni formali geometrico-analitiche sul simplesso rappresentativo. Alcuni enunciati risultano più espressivi pensando che si tratti di suddividere un segmento (sempre: di lunghezza unitaria); avremo però cura di chiarire come il significato si conservi prescindendo dalle particolarità di tale interpretazione.

---

5) Seguiamo l'abituale convenzione di indicare con maiuscole i numeri aleatori, e con le corrispondenti minuscole (generalmente) il nome delle coordinate su cui ne rappresentiamo la distribuzione.

3. – Proprietà significative equivalenti.

Di una suddivisione casuale (nel senso detto al n. 2), diremo brevemente che essa soddisfa il criterio (0). Per la suddivisione in *due parti* è ovvio che la si ottiene col criterio (1)-(1′):

(1) per un intervallo, scegliendo « a caso » (nel senso di: densità costante) sull'intervallo il punto di divisione, Z (quindi $X_1 = Z$, $X_2 = 1 - Z$ sono le due parti);

(1′) per una grandezza qualunque, scegliendo analogamente $Z = X$ con distribuzione uniforme tra 0 e 1.

Nel caso dell'intervallo l'estensione alla suddivisione in un numero n qualunque di parti è immediata:

(2) scegliendo « a caso » (nel senso ad (1)) e indipendentemente tra loro, $n - 1$ punti divisòri, $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \cdots, Z^{(n-1)}$, le n parti in cui l'intervallo risulta suddiviso costituiscono una suddivisione casuale; le loro lunghezze sono $X_1 = Z_1$, $X_2 = Z_2 - Z_1, \cdots$ $\cdots, X_h = Z_h - Z_{h-1}, \cdots, X_n = 1 - Z_{n-1}$, essendo Z_h l'h-esimo dei $Z^{(i)}$ in ordine crescente. Gli indici (i) in alto devono invece indicare, ad esempio, l'ordine cronologico delle scelte o altra cosa analogamente priva di relazione con l'ordine; in mancanza di elementi esterni rispondenti (come l'ordine cronologico) a tale requisito, le considerazioni basate sugli $Z^{(i)}$ possono venir riferite ai Z_h quali sarebbero dopo un'ipotetica permutazione che si pensasse di attuare in futuro con un criterio che desse a ciascuna delle $(n - 1)!$ permutazioni possibili la stessa probabilità $1/(n - 1)!$ (randomization).

Per provare l'equivalenza delle condizioni (2) e (0) basta notare che la (2) significa densità costante nelle z il che equivale a densità costante nelle x (perché, come detto, la dipendenza è lineare), ossia alla (0). Più distesamente: la probabilità che sia $z_h \leq Z^{(h)} \leq z_h + dz_h$ per tutti gli $h = 1, 2, \cdots, n - 1$ vale, nell'ipotesi (2), $dz_1\, dz_2 \cdots dz_{n-1}$, quali che siano i z; possiamo prenderli in ordine crescente [6] e considerare tutte le permutazioni sugli Z per ottenere la probabilità che di essi ne cada uno (non importa quale) in ciascun intervallino, conclu-

---

[6] Il caso in cui i valori di due delle Z, o delle X, coincidano, ha probabilità nulla, per cui non ha scopo menzionarlo esplicitamente appesantendo l'esposizione. È chiaro che, volendo, tali casi limite si possono precisare in un modo qualunque (per esempio stabilendo che, se due valori coincidono, nell'ordinamento si segue per essi l'ordine cronologico – se ha senso – oppure si procede a sorteggio, ecc.: che i punti di frontiera si attribuiscono a questa o quella regione, ecc.).

dendo che è $(n-1)!\,dz_1\cdots dz_{n-1}$, od anche $(n-1)!\,dx_1\cdots dx_{n-1}$ dato che il determinante (jacobiano) della trasformazione vale manifestamente 1 (tutti 1 sulla diagonale principale e sotto, tutti 0 sopra). L'ultimo risultato dice del resto semplicemente che la misura $dx_1\cdots dx_{n-1}$ va divisa per $1/(n-1)!$ che è la misura del simplesso.

Presentandolo diversamente, il criterio (2) assume la forma (3) che ha il vantaggio di indicare un processo costruttivo ricorrente e di risultare applicabile in modo significativo – nella forma (3′) – a qualunque caso (e cioè senza riferirsi necessariamente al caso dell'intervallo).

Si ottiene infatti una suddivisione casuale in – successivamente – due, tre, $\cdots$, n, $n+1, \cdots$ parti scegliendo successivamente, sull'intervallo, dei punti divisòri $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \cdots, Z^{(n-1)}, Z^{(n)}, \cdots$ conformemente al criterio (2), ossia (in modo manifestamente equivalente):

(3) dividendo dapprima l'intervallo in due partí secondo la (1), e successivamente, dopo la divisione in n parti, passando alla divisione in $n+1$ parti dividendo in due allo stesso modo una delle parti precedenti, scelta *con probabilità proporzionale alla lunghezza* (anzi numericamente uguale, ma è inutile sottolineare tale coincidenza dovuta alla mera convenzione di assumere per comodità la lunghezza totale come unitaria).

E, con linguaggio valido in ogni caso, possiamo dire:

(3′) basta dividere in due parti, casualmente nel senso della (1′) dapprima la grandezza data, e quindi ogni volta, dopo la divisione in n parti, una di queste scelta con probabilità proporzionale alla sua grandezza. Se, ad esempio, si tratta di una massa costituita di particelle uguali (molte e piccolissime, se la trattazione nel continuo ha da apparire adeguata), la scelta della parte da suddividere può pensarsi effettuata scegliendo « a caso » (cioè: con uguale probabilità) una delle particelle e decidendo di dividere la parte cui appartiene.

4. – Generalizzazione di un risultato di Ghizzetti–Roma.

Dimostriamo che, in una suddivisione casuale in n parti: *la probabilità che le loro n grandezze (aleatorie)* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *(di somma* $=1$*) risultino rispettivamente maggiori di n valori comunque assegnati* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *(di somma* ≤ 1*) vale*

$$p = [1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)]^{n-1}. \qquad [1]$$

Prendendo uguali a zero alcune delle x_h si ha il caso di meno che n disuguaglianze; prendendo poi le altre (siano in numero di j) uguali a un valore comune λ si ha il risultato di Ghizzetti–Roma [7]:

la probabilità $\gamma_j^{(n)}(\lambda)$ che j prefissate tra le n parti risultino tutte $> \lambda$ (indifferentemente che anche altre fra le $n - j$ rimanenti siano $> \lambda$ o no) è:

$$[1'] \qquad \gamma_j^{(n)}(\lambda) = \begin{cases} (1 - j\lambda)^{n-1} & se \ \ j\lambda \leq 1 \ (\lambda \leq 1/j) \\ 0 & se \ \ j\lambda \geq 1 \ (\lambda \geq 1/j). \end{cases}$$

È certo possibile estendere al nostro caso il procedimento analitico seguito da questi Autori; illustreremo invece altre dimostrazioni più sintetiche e intuitive.

Geometricamente, pensando alla rappresentazione sul simplesso, le condizioni $X_1 > x_1, \cdots, X_n > x_n$ significano che il punto P rappresentativo della suddivisione deve cadere a distanza maggiore di x_1 dalla faccia $x_1 = 0$, ecc., ossia in una regione costituente un simplesso regolare di dimensioni ridotte nel rapporto da 1 a $1 - (x_1 + \cdots + x_n)$ e quindi di volume ridotto secondo la potenza $(n - 1)$-esima di tale rapporto (essendo le dimensioni $n - 1$). Le figure 1, 2, 3, rendono evidente la cosa nel caso $n = 3$ (triangolo); è facile immaginarsi la stessa cosa per $n = 4$ (tetraedro).

L'interpretazione probabilistica è però naturalmente la più direttamente significativa e interessante. Pensando al caso dell'intervallo, è ovvio intanto che per aversi $X_1 > x_1$ occorre e basta che gli $n - 1$ punti divisòri cadano tutti nell'intervallo da x_1 ad 1, di lunghezza $1 - x_1$, il che ha probabilità $(1 - x_1)^{n-1}$ (caso particolare ove sia $x_2 = \cdots = x_n = 0$). Ed è anche ovvio analogamente che lo stesso ragionamento sussiste quando siano non nulli i due valori x_1 ed x_n: affinché sia $X_1 > x_1$ ed $X_n > x_n$ occorre e basta che gli $n - 1$ punti divisòri cadano tutti nell'intervallo tra x_1 ed $1 - x_n$, di lunghezza $1 - x_1 - x_n$, per cui la probabilità è $(1 - x_1 - x_n)^{n-1}$. Ciò posto, basta dimostrare e si può dimostrare che la probabilità $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 > x_1, \cdots, X_n > x_n)$ dipende soltanto

---

7) Volendo conservare alla lettera ω l'impiego abituale nella trattazione di eventi scambiabili (cfr. n. 5), era giocoforza scrivere qui in altro modo ($\gamma_j^{(n)}(\lambda)$) ciò che è indicato da Ghizzetti–Roma con $\omega_j(\lambda)$, mentre con $\omega_j^{(n)}(\lambda)$ indicheremo (nel n. 5, formula [4]) ciò che essi indicano $p_j(\lambda)$.

dalla somma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, ossia che non varia diminuendo e aumentando di uno stesso valore a risp. un addendo x_h ed un altro x_k (beninteso, $0 \leq a \leq x_h$). È intanto evidente che la F è funzione simmetrica delle x: soltanto la rappresentazione sull'intervallo può

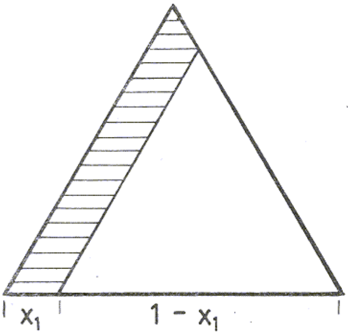

Fig. 1.

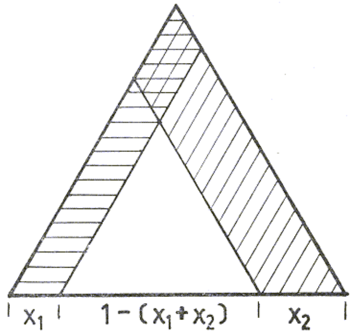

Fig. 2.

dare un'impressione di non simmetria, ma ne abbiamo provato l'equivalenza con gli altri enunciati dove nessun appiglio per possibili asimmetrie compare. Possiamo quindi limitarci a modificare x_1 ed x_n in $x_1 + a$ ed $x_n - a$ (con a qualunque tra $-x_1$ e $+x_n$) ossia a riprendere il caso particolare già visto, salvo l'obbligo di accertare

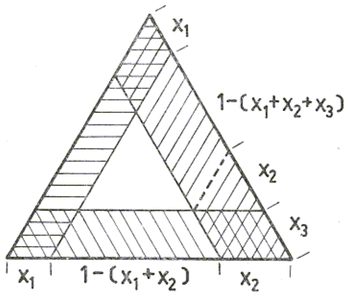

Fig. 3.

in più che l'invarianza permane pur considerando simultaneamente anche le altre condizioni. Dev'essere cioè invariante, dipendente solo dalla lunghezza $1 - x_1 - x_n$ dell'intervallo utile, non soltanto la probabilità che tutti gli $n - 1$ punti divisòri cadano in esso, ma che, cadendovi, lascino tra il 1° e il 2°, il 2° e il 3°, $\cdots$, il penultimo e l'ultimo, intervalli superiori ai limiti prefissati $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$, e ciò è evidente per l'ipotesi di uniformità della distribuzione, di invarianza per traslazione.

Volendo esprimere il ragionamento in modo formalizzato, si può dire che: era stato dimostrato che $P(X_1 > x_1, X_n > x_n) = F(x_1, 0, 0, \cdots, 0, x_n) = (1 - x_1 - x_n)^{n-1}$; è (probabilità composte: con $P(E|H)$ indichiamo la probabilità di E subordinatamente ad H)

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \cdots, X_{n-1} > x_{n-1}, X_n > x_n) =$$

$$= P(X_1 > x_1, X_n > x_n) \cdot P(X_2 > x_2, \cdots, X_{n-1} > x_{n-1} | X_1 > x_1, X_n > x_n),$$

ma il secondo fattore non varia (per il motivo detto) variando x_1 e x_n senza alterarne la somma; perciò, e tenuto conto della simmetria di F, vale l'asserto.

È opportuno indicare anche una formula che può considerarsi la traduzione della [1] in termini di densità: se indichiamo con $f(x_1, x_2, \cdots, x_h)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_h$ $(h < n)$ la probabilità che h parti prefissate abbiano grandezze X_i comprese tra x_i ed $x_i + dx_i$ $(i = 1, 2, \cdots, h)$, risulta

$$[2] \qquad f(x_1, x_2, \cdots, x_h) = K\,[1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_h)]^{n-h-1}$$

$$(K = (n-1)!/(n-h-1)!)\,;$$

in particolare (come già si poteva vedere direttamente derivando la funzione di ripartizione, complementare della trovata funzione $(1-x)^{n-1}$ di poc'anzi), per $h = 1$

$$[2'] \qquad f(x) = (n-1)(1-x)^{n-2},$$

e per $h = 2$

$$[2''] \qquad f(x_1, x_2) = (n-1)(n-2)(1 - x_1 - x_2)^{n-3}, \text{ ecc.}$$

Per dimostrare la [2] basta osservare (sostanzialmente col medesimo ragionamento già svolto) che h punti divisòri tra gli $n-1$ (una qualunque delle $(n-1)!/(n-h-1)!$ disposizioni di essi h ad h) devono cadere in $z_1 = x_1$, $z_2 = x_1 + x_2, \cdots, z_h = x_1 + x_2 + \cdots + x_h$ (con scarti dz_i compatibili coi dx_i, e sappiamo che lo jacobiano vale 1), e che i rimanenti $n - h - 1$ devono cadere nel residuo intervallo $1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_h)$.

5. – La scambiabilità.

La menzionata simmetria di F significa *scambiabilità* [8] per i numeri aleatori $X_1, \cdots, X_n$, ossia invarianza di ogni problema di probabilità ad essi relativo, rispetto ad ogni permutazione delle X_h. Si noti che F funge da funzione di ripartizione (per corrispondere alla convenzione usuale, coi segni $<$ anziché $>$, basterebbe considerare le $-X_h$ anziché le X_h). Va notato che il fatto che dei numeri aleatori, come le X_h, siano scambiabili dipende non tanto o comunque non solo dai fenomeni da cui derivano, quanto o comunque altresì dal modo e dalle conoscenze in base a cui li distinguiamo. Se $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ sono numeri aleatori qualsiansi (con distribuzioni comunque diverse tra loro e non importa se indipendenti o in qualsivoglia modo stocasticamente dipendenti), ed $X_1, X_2, \cdots, X_n$ [9] sono i medesimi numeri permutati «a caso» (probabilità $1/n!$ per ogni permutazione possibile), gli X_h risultano evidentemente scambiabili (perché, qualunque sia $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, è ovviamente simmetrica la funzione $F^*(x_1, \cdots, x_n) = (1/n!) \Sigma F(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$ con somma estesa a tutte le $n!$ permutazioni $i_1 \cdots i_n$). Si può dire, per esprimere tale fatto con frase intuitiva, che la scambiabilità dipende dal fatto che *l'individuazione delle X_h è ottenuta in modo non informativo* (che non *informa*, cioè, su fatti che le differenziano probabilisticamente le une dalle altre). Vedremo presto controesempi anche per il nostro argomento, cui ora torniamo.

Intanto vediamo su alcuni esempi come, sfruttando la scambiabilità e tenendo conto dell'equivalenza dei criteri enumerati nel n. 3, questioni la cui trattazione analitica risulterebbe pesante si risolvano spesso senza calcoli o quasi.

Qual'è la distribuzione di probabilità della somma di due (o di tre, o in genere di h) degli n pezzi ? Per ciascuno la densità di probabilità è data dalla [2'], ma occorre tener presente che le X_h sono

---

[8] È la nozione che avevo introdotta col nome di «equivalenza» (in *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio*, «Mem. Acc. Naz. Lincei», 1930); a tale denominazione (seguita anche da Khintchine ed altri AA.) è stata sostituita da Hewitt e Savage quella di «simmetria» e da Fréchet quella di *scambiabilità*, che sembra l'unica non ambigua, e che pare ormai generalmente accettata (échangeabilité, exchangeability, Austauschbarkeit).

[9] In questo punto gli X_h sono qualunque, senza riferimento all'argomento del presente lavoro.

manifestamente interdipendenti (non fosse che per avere necessariamente somma $= 1$), come del resto mostra la [2''] (non è $f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2)$): più precisamente, la densità per $x = x_2$, *supposta nota* $x_1 = a$, è ovviamente $f(x) = (n-2)(1-a-x)^{n-2}$ (trattandosi di una parte ottenuta dividendo in $n-1$ passi la lunghezza $1-a$).

Però, si noti, la somma di h qualunque di esse, per la scambiabilità, può sempre pensarsi come somma dei primi h segmenti in una suddivisione in n parti dell'intervallo, cosicché essa non è che l'ascissa dell'h–esimo punto divisorio, Z_h. E notoriamente la densità è per esso [10]

$$f_h(x) = K \cdot x^{h-1} (1-x)^{n-h-1} \qquad \left(K = (n-1)\binom{n-2}{h-1}\right) \tag{3}$$

cioè una distribuzione beta (con, per $h=1$, la precedente $f(x)$). Basta del resto pensare che dei punti divisòri devono caderne $h-1$ a sinistra ed $n-h-1$ a destra di x.

Se, anziché la somma, consideriamo la differenza (in valore assoluto) fra due parti, sia $|X_1 - X_2|$, si conclude immediatamente, con ragionamento sintetico, che essa ha la stessa distribuzione di una generica parte, diciamo X_1. Infatti X_1 (come del resto X_2) si può pensare ottenuto dividendo a caso l'intervallo $X_1 + X_2$ (scegliendo cioè il punto divisorio con distribuzione uniforme); ma la differenza non è che il doppio della distanza di tale «punto scelto a caso» dal centro dell'intervallo, distanza che viene essa stessa in tal modo scelta a caso tra zero e la metà della somma $X_1 + X_2$. Desiderando una verifica analitica, si noti che $X_1 + X_2$ ha probabilità $K \cdot x\,(1-x)^{n-3}\,dx$ di cadere tra x e $x + dx$, e che in tal caso è dz/x la probabilità che la differenza $|X_1 - X_2|$ cada tra z e $z + dz$ (per $z < x$); la probabilità di ciò, non condizionata, è pertanto

$$K \cdot dz \int_z^1 \frac{1}{x}\,[x\,(1-x)^{n-3}\,dx] = K \cdot (1-z)^{n-2} = f_1(z).$$

Come altro esempio, si osservi il più generale problema della nota Ghizzetti–Roma. La probabilità che esattamente j degli n pezzi risultino superiori a un valore λ assegnato è data ivi con la for-

---

[10] Con K intendiamo sempre la costante occorrente per la normalizzazione (se càpita, diversa da formula a formula anche nel medesimo contesto: per esempio, come avverrà in fine al n. 6, scriviamo $K(1-nx)^m = K((1/n)-x)^m$).

mula [2.7], e la sua deduzione è rapida anche per la via analitica ivi usata. Ma è istruttivo notare, in relazione alle presenti considerazioni, che si tratta di applicare agli eventi scambiabili $E_h = (X_h > \lambda)$ la fondamentale relazione

$$\omega_j^{(n)} = \binom{n}{j} \sum_j^n {}_r (-1)^{r-j} \binom{n-j}{r-j} \omega_r .$$

Non è il caso di riportarne la deduzione; basti soggiungere che essa deriva dall'espressione che dà in generale la probabilità $\omega_h^{(n)}$ (che tra n eventi $E_1 \cdots E_n$ se ne verifichino esattamente h) come combinazione lineare di probabilità di prodotti $P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_k})$ (con $k \leq h$); si tratta del caso particolare in cui (per l'ipotesi di scambiabilità) tutti i prodotti di k eventi hanno la stessa probabilità $\omega_k^{(k)}$ ($= \omega_k$, per brevità) [11].

Nel caso in oggetto, la relazione esprime la probabilità $\omega_j^{(n)}(\lambda)$ che esattamente j (non importa quali) degli n pezzi superino λ, in funzione delle probabilità $\gamma_j^{(n)}(\lambda)$ che j prefissati superino λ (non importa cosa avvenga per gli altri $n-j$):

$$[4] \qquad \omega_j^{(n)}(\lambda) = \binom{n}{j} \sum_j^n {}_r (-1)^{r-j} \binom{n-j}{r-j} \gamma_r^{(n)}(\lambda) =$$

$$= \binom{n}{j} \sum_{j \geq r \geq 1/\lambda} (-1)^{r-j} \binom{n-j}{r-j} (1 - r\lambda)^{n-1}$$

6. – Ordinando le parti secondo grandezza.

Le grandezze delle n parti, $X_1 \cdots X_n$, sono scambiabili quando, come si è detto, le parti stesse sono individuate in modo *non informativo*; non lo sono più in caso d'individuazione informativa, come

---

[11] Cfr. per esempio *op. cit.* [7] oppure *Calcolo delle probabilità* in « Seminari di Mat. Fin. e Attuar. », Centri Didatt. Naz., 1958 (ristampa 1962, Min. P. I.); ivi la deduzione per la forma generale si vede a p. 31 a proposito della formula [23], mentre il caso particolare della scambiabilità porta alla formula [37] a p. 48.

L'esposizione più ampia è quella data dall'A. in *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*, « Ann. Inst. Poicaré », 1937, ora ripubblicata in inglese nel volume antologico: H. E. Kyburg and H. E. Smokler, *Studies in Subjective Probability*, Wiley, New York 1964, contenente, oltre a detto lavoro e a un'introduzione degli AA., scritti di J. Venn, E. Borel, F. P. Ramsey, B.O. Koopman ed L. J. Savage.

quello in cui le parti vengano indicate in base all'ordine di grandezza o scelte in modo influenzato dalla grandezza. Consideriamo ora il primo caso, e indichiamo pertanto con $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ le n grandezze $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ordinate secondo grandezza crescente: $Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots \leq Y_n$.

La distribuzione di probabilità è quella stessa valevole per $X_1, X_2, \cdots, X_n$ subordinatamente all'ipotesi che riesca $X_1 \leq X_2 \leq \cdots \cdots \leq X_n$, ossia, nel solito simplesso, la densità è ancora costante ma

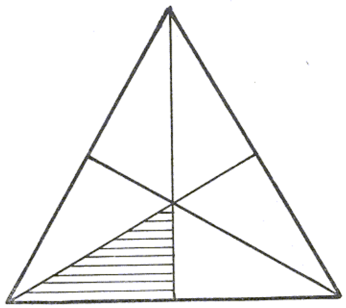

Fig. 4.

limitatamente ad una delle $n!$ regioni in cui esso è diviso dagli iperpiani mediani $x_h = x_k$ e corrispondenti alle $n!$ permutazioni in cui può verificarsi l'ordine crescente. Numericamente, la densità costante varrà pertanto $n!/(n-1)! = n$ (dato che valeva $1/(n-1)!$ nel caso precedente.

Le figg. 4 e 5 mostrano tale zona nei casi di $n = 3$ ed $n = 4$.

In modo geometrico-analitico, la probabilità che Y_h risulti $\leq x$ (oppure compresa tra x ed $x + dx$) non è che il volume della porzione tagliata dall'iperpiano $x_h = x$ (e dalla banda $x_h < x$) della regione ammissibile $(x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n)$ (risp. compresa tra $x_h = x$ ed $x_h = x + dx$). Quello che si può dire subito è che Y_1 non può superare $1/n$, Y_2 non può superare $1/(n-1), \cdots, Y_h$ non può superare $1/(n-h+1), \cdots, Y_{n-1}$ non può superare $1/2$ (potendo tutti giungere, da una parte fino a zero, dall'altra fino all'estremo superiore indicato nel qual caso tutti i pezzi precedenti sono nulli e tutti i successivi hanno il suo stesso valore); quanto al pezzo maggiore, Y_n, si può dire invece che vale almeno $1/n$ (nel caso di n parti uguali) e può giungere ad 1 (se tutte le altre parti sono nulle). Tali circostanze si ripercuotono naturalmente sui calcoli, tramite discontinuità nella delimitazione del campo d'integrazione all'incontro di vertici della regione ammissibile (e in corrispondenza, appunto, dei valori del tipo $1/k$, $k = 2, 3, \cdots, n$).

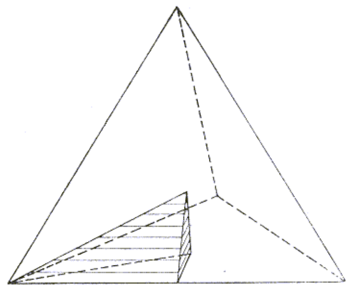

Fig. 5.

Detti $A_1, A_2, \cdots, A_n$ i vertici del simplesso iniziale (coordinate $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, per A_h tutte nulle tranne $x_h = 1$) la regione ammissibile supponendo le x_h crescenti è ancora un simplesso i cui vertici sono

$$C_n = A_n, \quad C_{n-1} = (A_n + A_{n-1})/2, \quad C_{n-2} = (A_n + A_{n-1} + A_{n-2})/3, \cdots$$
$$C_{n-h+1} = (A_n + A_{n-1} + \cdots + A_{n-h+1})/h, \cdots$$
$$C_1 = (A_n + A_{n-1} + \cdots + A_2 + A_1)/n$$

(cioè: l'ultimo vertice, il baricentro dei due ultimi ossia il centro del loro spigolo, quello dei tre ultimi ossia centro della faccia, $\cdots$, baricentro di tutti ossia del simplesso). In coordinate (baricentriche), C_{n-h+1} è il punto $(0, 0, \cdots 0, 1/h, 1/h, \cdots, 1/h)$ (ultime h coordinate $1/h$, nulle le prime $n-h$).

Il baricentro di tale simplesso (e dei suoi vertici) è dunque il punto $C = (C_1 + C_2 + \cdots + C_n)/n$, ossia

$$C = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_h A_h \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{n-h+1} \right);$$

le sue coordinate

$$\eta_h = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-h+1} \right)$$

esprimono pertanto le speranze matematiche delle Y_h. La parte più piccola, Y_1, ha $\mathfrak{M}(Y_1) = 1/n^2$, la seconda ha $\mathfrak{M}(Y_2) = 1/n^2 + 1/n(n-1), \cdots$, per la più grande si ha

$$\mathfrak{M}(Y_n) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \cong \frac{1}{n}(\gamma + \log n)$$

(se n è grande)

(γ = costante di Eulero–Mascheroni = 0,577 215 66), e in generale (per n ed h entrambi grandi)

$$\mathfrak{M}(Y_h) \cong \frac{1}{n} \log \frac{n}{n-h} .$$

Si noti in particolare che si ha $\mathfrak{M}(Y_h) \cong 1/n$ quando $n/(n-h) \cong e$ ossia $h \cong (1 - e^{-1})\, n = 0{,}632\ 121\ n$; ciò vuol dire che è all'incirca per tale h che è indifferente aver diritto all'h-esimo pezzo in ordine di grandezza oppure al sorteggio « a caso » fra tutti gli n pezzi.

Un ragionamento diretto permette di ricondurre il problema, senza ulteriori calcoli, al risultato di Ghizzetti–Roma. Detta $f(x) = K(1-x)^{n-2}$ la densità della distribuzione di un pezzo X_h prima di sapere nulla di informativo, e $\varphi_h(x)$ la densità subordinatamente all'ipotesi che X_h sia Y_h, ossia l'h-esimo nell'ordine di grandezza crescente, avremo (scrivendo in due modi la probabilità che sia $X_h = Y_h$ ed $x \leq X_h \leq x + dx$)

$$P(X_h = Y_h)\, \varphi_h(x)\, dx = f(x)\, dx\, P(X_h = Y_h \mid X_h = x) ;$$

ma la probabilità che X_h sia l'h-esimo vale $1/n$ inizialmente e, subordinatamente ad $X_h = x$, è data dall'espressione di Ghizzetti–Roma applicata alla suddivisione dell'intervallo di lunghezza $1-x$ in $n-1$ parti di cui si vuole che risultino $h-1$ inferiori ad x, ossia $j = n-h$ superiori (ossia che, ripotandosi alla lunghezza totale 1, delle $n-1$ parti risultino $j = n-h$ superiori ad $x/(1-x)$). Abbiamo quindi

$$\varphi_h(x) = K \cdot (1-x)^{n-2}\, \omega_{n-h}^{(n-1)}(x/(1-x)) . \tag{4}$$

Sembra superfluo, almeno qui, sviluppare risultati espliciti che sarebbero utili come esercizio; basti accennare al caso più semplice che consente un istruttivo immediato controllo con l'interpretazione geometrica.

È il caso di $h = 1$, ossia della distribuzione di probabilità per la parte più piccola, Y_1. Poiché la regione ammissibile è una piramide (ad $n-1$ dimensioni) con base sull'iperpiano $x_1 = 0$ e vertice nel punto $x_i = 1/n$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, la densità $\varphi_1(x)$, proporzionale alla misura dell'intersezione coll'iperpiano $x_1 = x$, deve valere $K \cdot \left(\frac{1}{n} - x\right)^{n-2}$ $(0 \leq x \leq 1/n)$. Si pensi, riferendosi alle figg. 4 e 5, ai casi $n = 3$ e $n = 4$.

Applicando la formula generale, e osservando che per $h = 1$ si viene ad aver a considerare la probabilità $\omega_{n-1}^{(n-1)}(\lambda)$ che una suddivisione in $n-1$ parti dia $n-1$ parti tutte superiori a $\lambda = x/(1-x)$, probabilità che è $[1-(n-1)\,x/(1-x)]^{n-2}$, si ritrova

$$[5] \qquad \varphi_1(x) = K\{(1-x)\cdot[1-(n-1)\,x/(1-x)]\}^{n-2} =$$
$$= K(1-x-(n-1)\,x)^{n-2} = K(1-nx)^{n-2} = K\cdot\left(\frac{1}{n} - x\right)^{n-2}.$$

7. – Una questione collegata.

Possiamo considerare altri problemi concernenti l'ordinamento chiedendoci ad esempio se il terzo pezzo sia minore (o maggiore) della somma dei primi due, $Y_3 < Y_1 + Y_2$, e, in generale, se una qualunque somma di pezzi d'ordine stabilito sia minore (o maggiore) di un'altra (per esempio $Y_2 + Y_5 + Y_8 < Y_4 + Y_7$). Più in generale ancora si può cercare la probabilità che la suddivisione sia tale da dare un prefissato ordinamento per le somme delle diverse parti (ordinate secondo grandezza crescente); ad esempio, con $n = 4$, che l'ordine risulti:

$$Y_1 \leq Y_2 \leq Y_1 + Y_2 \leq Y_3 \leq Y_1 + Y_3 \leq Y_2 + Y_3 \leq$$
$$\leq Y_1 + Y_2 + Y_3 \leq 1/2 \leq Y_4 \leq Y_1 + Y_4 \leq \text{ ecc.}$$

Si noti che l'inserimento del termine « 1/2 » è pleonastico, in quanto separa due parti complementari; per lo stesso motivo è superfluo proseguire a destra dato che non si potrebbe che ripetere in ordine inverso i complementi dei termini scritti a sinistra.

Non mi consta che tale questione sia stata trattata in generale, ed è presumibile non vi si presti agevolmente, dato che solo ricerche recenti hanno potuto stabilire dei criteri per distinguere quali tra gli ordinamenti del genere risultino possibili. Tale questione presentava un certo interesse in nesso alla possibilità di formulare assiomi puramente qualitativi per la teoria delle probabilità. Le ovvie condizioni di *comparabilità, transitività* e *additività* (per disuguaglianze) risultano anche sufficienti per $n = 4$ (come avevo verificato, ponendo la questione di vedere se ciò valesse sempre, come sembrava plausibile). Invece la congettura cade in difetto già per $n = 5$, come dimostrarono Kraft, Pratt e Seidenberg, che determinarono condizioni addizionali atte a stabilire la sufficienza; in modo alquanto diverso diede analoga risposta alla questione Maitra [12].

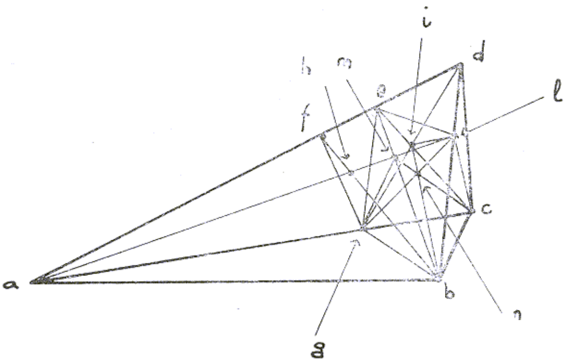

Fig. 6.

Per il caso di $n = 4$ posso indicare i risultati numerici incidentalmente stabiliti da L. Mancini in una tesi di laurea su argomenti connessi [13]. Gli ordinamenti possibili sono 14, corrispondenti a 14 parti in cui la regione ammissibile del tetraedro $(x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4)$ viene divisa dai piani $x_3 = x_1 + x_2$, $x_4 = x_1 + x_2$, $x_4 = x_1 + x_3$, $x_4 = x_2 + x_3$, $x_4 = x_1 + x_2 + x_3 (= 1/2)$, $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 (= 1/2)$ [14];

[12] B. DE FINETTI, *La 'logica del plausibile' secondo la concezione di Polya*, « Atti XLII Riun. S.I.P.S. », 1949; CH. H. KRAFT, J. W. PRATT e A. SEIDENBERG, *Intuitive probability on finite sets*, « Ann. Math. Statistics », *30* (1959) 408–419; A. K. MAITRA, *Sur la Théorie de la Décision dans le cas d'un nombre fini d'états*, Thése Fac. Sc. Univ. Paris, 1963 (ciclostilata).

[13] Cfr. cit. [2]; i presenti dati servivano ad esempio per determinare, in base alla « quantità d'informazione », la « strategia » ottima nel senso di condurre a individuare l'ordinamento col minimo numero atteso di confronti.

[14] Si tratta di piani che passano per punti mediani di spigoli ed eventualmente per dei vertici; precisamente (riferendoci all'esempio del piano $x_3 = x_1 + x_2$) passa per il vertice $x_4 = 1$ (perché x_4 non figura nell'equazione) e per i punti di mezzo degli spigoli congiungenti $x_3 = 1$ con $x_1 = 1$ o $x_2 = 1$ (perché x_3 e x_1, x_3 e x_2, figurano in membri opposti; si guardi la fig. 5).

se si considerasse l'intero simplesso, con tutte le regioni corrispondenti alle $4! = 24$ permutazioni possibili, le parti sarebbero $14 \times 24 = 336$).

Le probabilità (volumi) delle 14 parti (probabilità ossia volume unitario assumendosi quello della regione ammissibile) sono indicate nella tabella che segue.

Probabilità delle 14 zone

(in ordine di probabilità decrescente).

Num. d'ord.	Schema dell'ordinamento				Vertici (ved. fig. 6)	Probabilità (in %)
		(1,2)	(1,3)	(2,3)		
1)	1 2	3		(1,2,3) 1/2	*abgh*	37,5
2)	1 2 3			(1,2,3) 1/2	*afgh*	12,5
3)	1 2	3	4 (1, 4) 1/2		*bcgn*	10,–
4)	1 2	3 4	(1, 4) 1/2		*bcln*	6,667
5)	1 2	3		4 1/2	*bghm*	5,357
6)	1 2 3			4 1/2	*efghm*	4,643
7)	1 2	3	4	1/2	*bgmn*	4,286
8)	1 2 3 4		(1, 4) 1/2		*cdil*	4,167
9)	1 2 3		4	1/2	*egimn*	3,214
10)	1 2	3 4		1/2	*blmn*	2,857
11)	1 2 3 4			1/2	*deil*	2,5
12)	1 2 3		4 (1, 4) 1/2		*cgin*	2,5
13)	1 2 3	4		1/2	*eilmn*	2,143
14)	1 2 3	4	(1, 4) 1/2		*ciln*	1,667

Spiegazione: Lo « Schema dell'ordinamento » indica in forma sintetica le disuguaglianze fra parti e somme di parti (indicate coi numeri d'ordine o con coppie e terne tra parentesi: 3 indica Y_3, (2 , 3) indica Y_2+Y_3, ecc.); quelle nella prima colonna sono inferiori a (1 , 2), ossia ad Y_1+Y_2; quelle nella seconda tra (1 , 2) e (1 , 3), quelle nella terza tra (1 , 3) e (2 , 3); quelle oltre sono maggiori di (2,3); in fine è indicato « 1/2 » al punto ove ha inizio la successione simmetrica dei complementi. – L'indicazione dei vertici si riferisce alle lettere sulla figura; in genere sono quattro (zone tatraedriche), ma per le zone 6ª, 9ª e 13ª sono cinque (piramidi a base quadrangolare).

8. – Scegliendo le parti con probabilità proporzionale alla grandezza.

Sia X una delle parti X_h, scelta però con probabilità dipendenti dalla grandezza, in modo proporzionale (come spiegato nel n. 3, a proposito dei criteri (3) e (3')). La distribuzione di probabilità non è più la $f(x) = K \cdot (1 - x)^{n-2}$ come per una X_h scelta «a caso» (con probabilità uguali): essa sarà spostata favorendo i valori più grandi. La si può determinare senza calcoli, esprimendo anche qui (come per la [4]) in due modi la probabilità che il punto ξ che determina la scelta dell'intervallo cada nell'intervallo $[X_h]$ e che risulti $x \leq X_h \leq x + dx$: essa è data da

$$P(\xi \in [X_h]) \cdot \varphi(x)\, dx = f(x) \cdot dx \cdot P(\xi \in [X_h] \mid X_h = x)$$

$$(1/n) \cdot \varphi(x) = x \cdot f(x) = (n - 1)\, x \cdot (1 - x)^{n-2}$$

$$\varphi(x) = n(n - 1)\, x\, (1 - x)^{n-2} = K \cdot x\, (1 - x)^{n-2}. \tag{6}$$

Confrontado con la [2], risulta cioè che la distribuzione è la stessa che vale per la somma di due parti derivanti da una suddivisione casuale in $n + 1$ parti (basta porvi $h = 2$ ed $n + 1$ al posto di n). E ciò corrisponde al fatto che, usando il punto ξ come nuovo punto di suddivisione abbiamo una suddivisione in $n+1$ parti, *casuale*, e perciò tutte le parti (quelle rimaste non suddivise, e ciascuna delle due in cui ξ ha spezzato quella prescelta) hanno (in assenza di altre informazioni «informative circa le grandezze») la distribuzione di densità $f(x) = K \cdot (1 - x)^{n-1}$, e la somma di due qualunque di esse (in particolare delle due ottenute per spezzamento di X, ossia la stessa X) ha la distribuzione indicata.

Ne segue tra l'altro che la speranza matematica della X vale $2/(n + 1)$, anziché $1/n$ come nel caso di scelta casuale (ossia quasi il doppio); confrontando con $\mathfrak{M}(Y_h)$ (formula assintotica, n. 6) si vede che la scelta con probabilità proporzionale alla grandezza equivale all'incirca (per n grande, e per riguardo alla speranza matematica) a scegliere la parte h–esima in ordine di grandezza crescente con $h \cong (1 - e^{-2})\, n = 0{,}864665\ n$.

Si può rilevare che lo stesso ragionamento consente di dire in generale che se la probabilità di scelta di un intervallo si suppone proporzionale, anziché alla grandezza x, ad una sua qualunque funzione $g(x)$, la distribuzione della X prescelta risulta $\varphi(x) =$

$=K \cdot g(x) \cdot f(x)$. Se ad esempio due individui (o similmente per più, diciamo m) scelgono simultaneamente e indipendentemente ξ_1 e ξ_2 e viene scelto un intervallo soltanto se entrambi detti punti vanno a cadere in esso, abbiamo uno schema di scelta per cui $g(x) = x^2$ (o similmente x^m); in questo caso non solo le formule seguitano a sussistere ma anche l'interpretazione: suddivisione in $n + 2$ (o in generale in $n + m$) parti « a caso », ecc. In particolare si noti che la probabilità che un tale esperimento riesca (i due punti cadano in un medesimo intervallo, non importa quale) è $2/(n + 1)$; infatti ξ_1 e ξ_2 insieme ai precedenti $n - 1$ punti divisòri sono $n + 1$ punti divisòri a caso, dei quali i due detti sono due qualunque; affinché cadano nel medesimo degli intervalli preesistenti devono essere consecutivi fra tutti gli $n+1$, ma le coppie consecutive sono n su $\binom{n+1}{2}$. Più sinteticamente: dopo pensato scelto ξ_1, basta dire che ξ_2 deve cadere in uno dei *due* intervalli adiacenti a ξ_1 fra gli $n+1$ della suddivisione ottenuta. (Analogamente, per m individui anziché due, si ha la probabilità $m!\,n!/(n + m - 1)!$).

Può essere istruttivo soffermarsi sul caso di scelta di due individui (nel modo ora detto) esplorando tutti i casi: siano X' ed X'' gli intervalli (tra gli n della suddivisione iniziale) « pescati » dal 1° e dal 2° individuo essendovi caduti rispettivamente il punto ξ_1 ed il punto ξ_2. Potrà darsi si tratti del medesimo intervallo (caso precedente, di probabilità – come detto – $2/(n + 1)$), e allora $X = X' = X''$ avrà distribuzione di probabilità della somma di tre pezzi della suddivisione in $n + 2$ parti (e in particolare, quindi, speranza matematica $3/(n + 2)$); altrimenti (probabilità $(n - 1)/(n + 1)$) si tratterà di due pezzi distinti, ciascuno dei quali avrà distribuzione di probabilità della somma di due pezzi (e speranza matematica $2/(n + 2)$; come verifica, si noti che la media dei due valori con le rispettive probabilità fornisce, come doveva essere, $2/(n + 1)$). Se poi (nel caso $X' \neq X''$) sappiamo quale dei due pezzi è maggiore, sia X'', possiamo calcolare agevolmente la speranza matematica relativa a tale conoscenza, che è $11/8$ di $2/(n + 2)$, mentre per il pezzo minore di conseguenza è $5/8$; si noti (forse sembra paradossale) che la lunghezza del pezzo scelto da uno degli individui è pertanto (prendendo come unità di misura $2/(n + 2) = M$):

$1 + 1/(n+1)$	prima di sapere nulla della scelta dell'altro individuo,
1	sapendo che il pezzo scelto dall'altro non è il medesimo,

$5/8 = 0{,}625$ sapendo che il pezzo scelto dall'altro non è maggiore,
$11/8 = 1{,}375$ » » » » » è minore,
$3/2 = 1{,}50$ » » » » » è uguale [15];

l'uguaglianza è il caso più favorevole per un alto valore della lunghezza, perché il fatto che entrambi i punti abbiano colpito il medesimo intervallo rende particolarmente plausibile l'ipotesi che sia lungo.

Come dimostrazione, basta pensare che i due pezzi X' e X'' (che supponiamo distinti) siano $X_1 + X_2$ e $X_3 + X_4$ (ciò che, per la scambiabilità, non è restrittivo). Il punto divisorio Z_2 fra essi, sul segmento da 0 a $Z_4 = X' + X''$ preso momentaneamente come unità, ha distribuzione di probabilità di densità $f(x) = 6x(1-x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ che diverrà $12x(1-x)$ $(0 \leq x \leq 1/2)$ nell'ipotesi $X' < X''$, e la speranza matematica è allora

$$12 \int_0^{1/2} x^2 (1-x)\, dx = 5/16.$$

Naturalmente, speranze matematiche e distribuzioni variano ancora in base ad altre eventuali informazioni: p. es. se è conosciuta la grandezza del pezzo scelto dall'altro individuo, sia $X'' = a$, avremo una probabilità a di scegliere lo stesso pezzo, e, nel caso opposto, di probabilità $1 - a$, distribuzione e speranza matematica saranno quelle di una scelta tra $n - 1$ parti di lunghezza complessiva $1 - a$ (quindi, in particolare, speranza matematica $2(1-a)/n$). E sarebbe facile moltiplicare esemplificazioni in questo stesso senso o in altri più o meno simili [16].

9. – Suddivisione in un numero di parti molto grande.

È facilmente intuibile che, al crescere del numero n delle parti della suddivisione, si arriva come caso asintotico a quello di una

---

[15] Sarebbe meglio dire «il medesimo»: se i due pezzi fossero *uguali* (di grandezza) ma *distinti*, la risposta sarebbe non 3/2 ma 1 (ovviamente). Però si tratta di eventualità di probabilità nulla, cosicché il fatto di sapere che $X' = X''$ equivale all'informazione che si tratta del medesimo pezzo a meno di casi di probabilità nulla che non alterano la conclusione; tuttavia essa andrebbe alterata, naturalmente, qualora si apprendesse che tale fatto di probabilità nulla si è verificato.

[16] Per altri argomenti collegati, v. P. Tortorici, *Problemi riguardanti una successione di suddivisioni casuali*, «Rend. di Mat. e delle sue Applicazioni», 23, 1–2 (1964).

suddivisione mediante un processo di Poisson (con intensità $\mu = n$). Ciò vuol dire semplicemente che (come al solito) per n molto grande diviene trascurabile la differenza tra il caso in cui il numero di suddivisioni per unità di lunghezza sia certamente n, oppure soltanto « in media » n.

Per eseguire un passaggio al limite sulle formule precedentemente ottenute occorre prendere come unità di misura $1/n$ (cioè la grandezza media di ogni pezzo), onde avere come formule assintotiche quelle del processo poissoniano di intensità $\mu = 1$. Assumeremo pertanto come variabile $\xi = nx$ (ossia porremo $x = \xi/n$).

E si ottiene subito:

dalla [2]:

$$K(1-x)^{n-2} = K\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^{n-2} \to K\,e^{-\xi} \qquad (K = 1\ ;\ 0 \leq \xi \leq \infty),$$

dalla [3]:

$$Kx^{h-1}(1-x)^{n-h-1} = K\xi^{h-1}\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^{n-h-1} \to K\xi^{h-1}e^{-\xi}$$

$$(K = 1/(h-1)!\ ;\ 0 \leq \xi \leq \infty),$$

dalla [6]:

$$Kx(1-x)^{n-2} = K\xi\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^{n-2} \to K\xi e^{-\xi} \quad (K=1\ ;\ 0\leq\xi\leq\infty):$$

la distribuzione secondo grandezza delle singole parti diviene esponenziale, quella delle somme di h parti diviene Gamma (come era da prevedere, dato che l'interdipendenza tende a scomparire), e lo stesso (come sapevamo) avviene per la grandezza della parte scelta con probabilità proporzionale alla grandezza (che in media, per tale scelta, risulta ora esattamente doppia).

Delle Y_h non si può a rigore parlare (su un intervallo illimitato vanno da zero a infinito); come variante si può dire però che, su un numero dato N di parti scelte « a caso (*NB* !) », la densità della distribuzione della h-esima in ordine di grandezza crescente risulta assintoticamente (ed esattamente – come è ovvio – nel caso di Poisson)

$$K(e^{\xi}-1)^{h-1}e^{-N\xi}.$$

La formula del valor medio rimane invariata (salvo che per il cambio di unità di misura cade il fattore $1/n$)

$$\mathfrak{M}(Y_h) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \cdots + \frac{1}{N-h+1} \cong \log\frac{N}{N-h}.$$

RÉSUMÉ

Observations sur la signification de « subdivision au hazard » et sur l'équivalence de certaines formulations. Généralisation d'un théorème de Ghizzetti–Roma. Problèmes et résultats découlant de l'échangeabilité, de l'ordre et de méthodes de choix plus générales. Notices sur d'autres problèmes connexes.

SUMMARY

Remarks on the meaning of " random subdivisions " and on the equivalency of some definitions. Generalization of a theorem of Ghizzetti–Roma. Questions and results depending on the exchangability, the rank and the more general selecting methods. Winks to other connected problems.

RESUMEN

Observaciones sobre el significado de « subdivisiones casuales » y sobre la equivalencia de algunas formulaciones. Generalización de un teorema de Ghizzetti–Roma. Cuestiones y resultados dependientes de la intercambiabilidad, del ordinamiento y de los métodos de elección más generales. Noticias sobre otros problemas relacionados.

ZUSAMMENFASSUNG

Bemerkungen ueber die Bedeutung der « zufaelligen Unterteilungen » und ueber die Gleichgueltigkeit einiger Formulierungen. Verallgemeinerung eines Theorems von Ghizzetti–Roma. Fragen und Schluessen die von Austauschbarkeit, Anordnung und allgemeinere Auswahlmethoden abhaengen. Erwaehnung anderer hiermit verbundener Probleme.