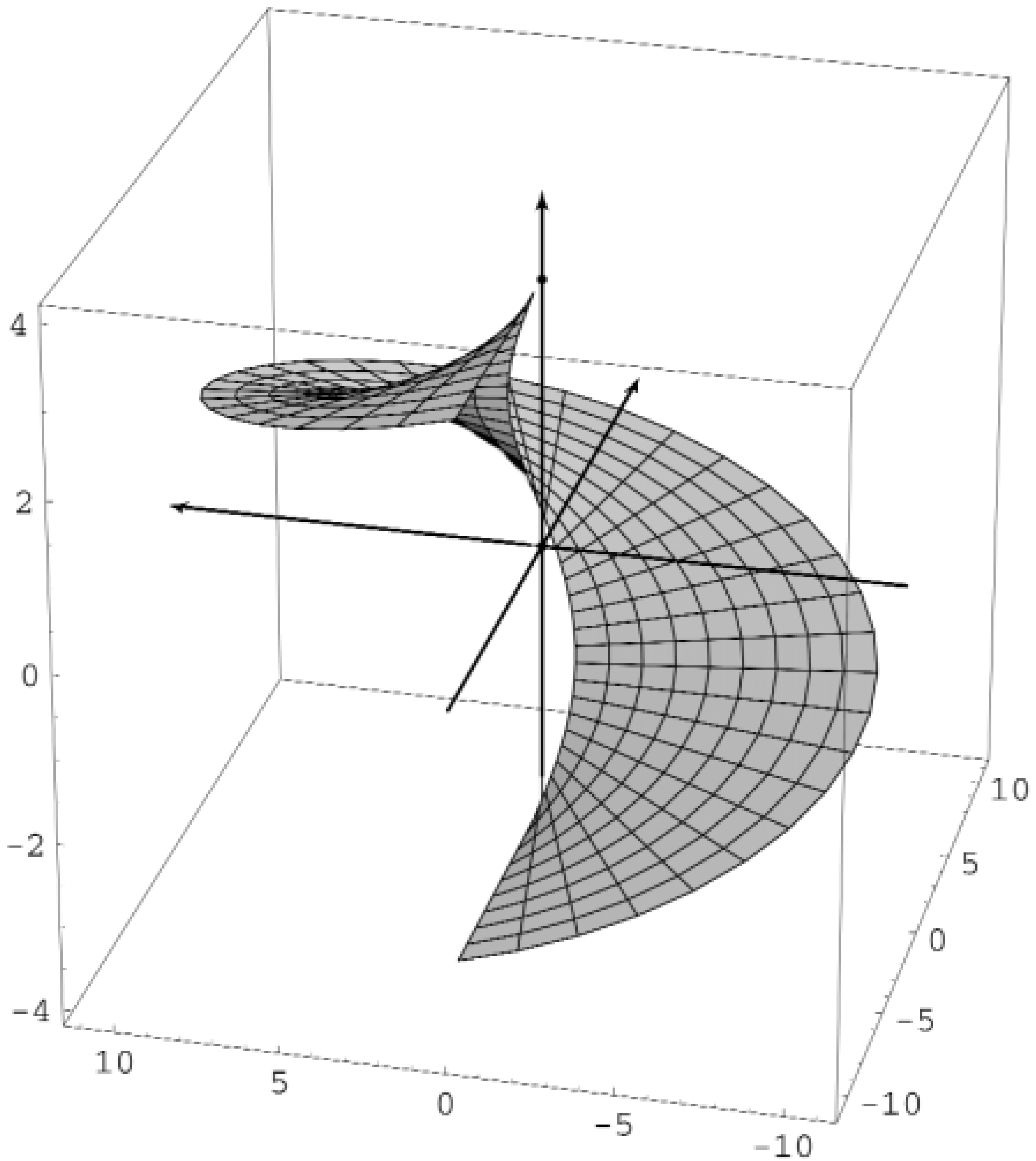
CABRIRRSAE 2000

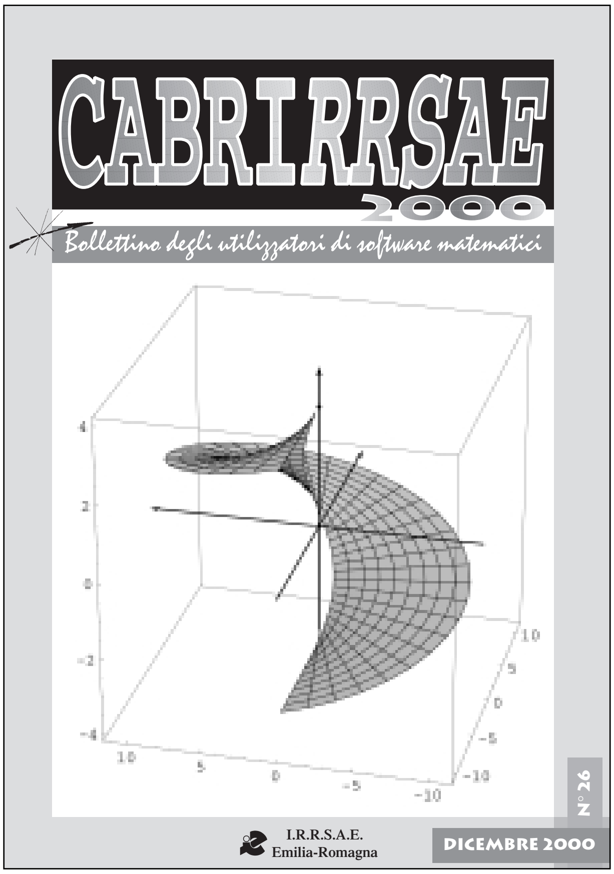
Bollettino degli utilizzatori di software matematici



N° 26

I.R.R.S.A.E.
Emilia-Romagna

DICEMBRE 2000



L'immagine

La figura, realizzata con il software Mathematica, mostra il grafico della funzione f(x,y) = Arg (x + iy), per |z| = | x+iy | compreso tra 1 e 10.
La funzione è discontinua lungo il semiasse reale negativo, con un salto uguale a 2π.

Errata corrige

Nel bollettino numero 25 l'immagine di copertina presenta un errore, del quale ci scusiamo con i lettori. La piccola freccia, visibile in basso, doveva essere il proseguimento dell'asse che si trova sul piano al di sopra di quella punta.

Cabri in biblioteca

A cura di Springer Editore è uscito il volumetto *Matematica e Internet* di A.M. Arpinati, F. Iozzi e A. Marini (ISBN 88-470-0079-3). Il manuale si propone come un punto di partenza per tutti coloro che intendono scoprire cosa può offrire la rete nel mondo della matematica. Un'ampia selezione di siti di interesse matematico, corredati da brevi commenti, è riportata al termine del testo e facilita l'utilizzo della Rete.

Indirizzo

Bollettino CABRIRRSAE 2000
IRRSAE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna
Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21
E-mail: cabri@kidslink.bo.cnr.it
http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/
Gruppo di discussione:
E-mail: cabrinews@arci01.bo.cnr.it

Fardiconto:
http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto/
Flatlandia:
http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/

La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:
http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/rivista.html

Supplemento al n.4 Luglio Agosto 2000, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento educativi dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24 - 10 - 1980. Direttore resp. Davide Ferrari, proprietà IRRSAE/ER.

Progettazione grafica e videoimpaginazione GRAPHICART
Via Fondazza, 37 - 40125 Bologna
Tel. Seg. Fax 051 30.70.73 - Tel. Seg. Modem 051 42.920.47

SOMMARIO

IN QUESTO NUMERO

Nella sezione ***Cabridiscusso*** riportiamo un intervento sul ruolo della matematica nei temi del progetto SeT (CM 270 del 12 Novembre 1999), tenuto da un docente universitario in un convegno svoltosi a Bologna.
Segue un breve articolo in cui si informano i lettori sull'iter di lavoro che ha portato alla sistemazione, nel sito web Fardiconto (http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto/) della traduzione dei materiali *Principles end Standards for School Mathematics: Discussion Draft-october 1998* (MCTM).
Nella sezione ***Come fare*** troviamo tre lavori. Nel primo viene presentata una esperienza didattica sul teorema di Pitagora., realizzata, con il supporto del software Cabri II, in una seconda classe di scuola secondaria di primo grado. Nel secondo viene proposta la soluzione del tema di maturità scientifica, corso ordinario, con l'ausilio del software Mathematica. Chiude la sezione la risoluzione di un problema di geometria sintetica, proposta per un biennio di scuola secondaria di secondo grado, in cui si utilizza la capacità del software Cabri-géomètre di visualizzare i luoghi geometrici.

CORSI E SEMINARI

Dal 12 al 14 Febbraio 2001 si svolgerà a Genova, in Fiera, la prima edizione di TED, rassegna di tecnologie didattiche innovative.
Si tratta di un evento integrato rivolto ai professionisti della scuola, realizzato con la collaborazione del Ministero della Pubblica Istruzione, del CNR – Istituto Tecnologie Didattiche.
TED si svilupperà in quattro direzioni: una parte interattiva, un settore espositivo tradizionale, un convegno scientifico internazionale e uno "spazio web". L'obiettivo è fornire uno strumento di aggiornamento completo sulle più recenti offerte di mercato nel settore della scuola, basato sulla partecipazione attiva degli operatori della formazione.
La partecipazione dei visitatori a TED è gratuita e riservata ai soli operatori scolastici, corpo docente e professionisti del settore, gli studenti ne sono esclusi. Sarà possibile accreditarsi direttamente alla reception della manifestazione o pre-iscriversi on line sul sito www.ted-online.it.
Per il convegno, che per gli insegnanti avrà valore di corso di aggiornamento riconosciuto dal Ministero della Pubblica Istruzione, è necessaria la pre-iscrizione

Il 16 e 17 Febbraio 2001, a cura di ADI (Associazione Docenti Italiani), si terrà il Convegno Nazionale "La dichiarazione dei diritti e dei doveri degli insegnanti", linee per una nuova professionalizzazione degli insegnanti nella società della conoscenza.
Il Convegno si svolgerà a Boplogna, presso la Sala dei Notai, via de' Pignattari, 1.
Per maggiori informazioni contattare il sito
http://www.bdp.it/adi/

INVIATECI I VOSTRI ARTICOLI

CABRI*RRSAE* pubblica contributi relativi all'utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre e di altri software matematici, con particolare attenzione alla valenza didattica e all'inserimento nel curricolo scolastico.
Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*
- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell'autore (anche in bassa qualità di stampa)
- una stampata delle sole figure ***in alta qualità di stampa***
- una stampata dei grafici ***in alta qualità di stampa***
- anche le immagini catturate dallo schermo devono essere accompagnate da una stampata ***in alta qualità***

• *SUPPORTO MAGNETICO*
- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .doc, meglio sarebbe se fosse .mcw) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte.
- altri materiali (tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell'applicativo che le ha generate, comunque sempre accompagnate da una stampata di alta qualità.
- altre immagini (tipo quelle tridimensionali) generate da qualunque programma, devono essere esportate come prodotti vettoriali, cioè con estensione A.I.
Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull'utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana "Quaderni di **CABRI***RRSAE* ".

Cabri discusso

Progetto SeT-Mmatematica 2000 è il titolo del convegno che si è tenuto a Bologna il 3 Aprile 2000, dedicato alla matematica e alle scienze. Riportiamo di seguito l'intervento del prof. Sergio Invernizzi.

Quale matematica nei temi del SeT?

di Sergio Invernizzi
Università di Trieste

Questa relazione si articola in due parti. Nella prima parte discuterò due tesi. La prima tesi è che c'è un'origine storica nel problema dell'insegnamento della matematica oggi. In altri termini, affermo che il nostro attuale modo di insegnare e di far studiare la matematica ha un'origine *storica* ben individuabile nel tempo. Qualche problema nell'insegnamento della matematica evidentemente esiste. Prova ne sia che siamo qui riuniti in questa sala. Evidentemente se non ci fosse nessun problema sull'insegnamento della matematica, non ci sarebbe neppure questo convegno...
La mia seconda tesi, che è lievemente più azzardata, è la seguente: nel contesto di quest' origine storica si trovano anche dei suggerimenti, delle risposte per vedere di cambiare le cose e per tentare una reazione.
La discussione di queste due tesi concluderanno la prima parte.
Nella seconda parte cercherò di calarmi concretamente nella realtà italiana, proponendo qualche suggerimento di carattere anche personale, nell'ottica di quanto sarà stato detto in precedenza, come suggerimento per qualche operatività concreta.

■ 1. Ricordi storici e filosofici

Attraverso colloqui, riflessioni e letture, mi sono fatto l'idea che l'origine storica del nostro modo attuale di insegnare matematica risalga a circa cento anni fa. All'inizio del secolo la concezione della matematica è cambiata radicalmente rispetto a quella che era appena cinquant'anni prima. Verso la metà del milleottocento i matematici erano molto interessati ai fondamenti filosofici di questa disciplina. All'epoca la filosofia dominante era quella (sicuramente questo dato non è smentibile) diel filosofo tedesco Immanuel Kant.

La filosofia dominante di Kant

Kant nacque a Königsberg, città della Prussia Orientale che oggi si chiama Kaliningrad ed è una città russa, anzi, un'enclave russa, un'isola di Russia continentale fra Polonia e Lituania. Ritengo importante che ogniqualvolta in classe si parli di una città o di un luogo, esso venga localizzato con precisione sulla carta geografica. Quanti hanno parlato e parlano del paradosso di "Achille e la Tartaruga", di Zenone di Elea, senza essersi preoccupati di sapere dove stesse o stia Elea?
Per seguire quanto io vorrei dire non è necessario assolutamente conoscere la filosofia di Kant. Basta avere presenti due cose: la prima è che la filosofia kantiana era veramente la filosofia dominante, nel senso che poteva essere molto pericoloso, accademicamente, non adeguarvisi. Si rischiava in sostanza la perdita del posto (lo stesso Kant rischiò di perdere il posto quando si ritenne che avesse invaso il campo religioso). La seconda cosa è che, nella filosofia kantiana, la nostra percezione del mondo esterno avviene tramite le strutture interne del tempo e dello spazio, che sono le "forme a priori" della sensibilità. Kant sostiene che sull'esistenza dello spazio è fondata la conoscenza della geometria; come su quella del tempo è invece fondata la conoscenza dell'aritmetica. Tentiamo un'analogia. Mi scuso con gli esperti di filosofia per la traduzione molto rozza delle idee Kantiane, ma essenzialmente il suo ragionamento è questo. Qualcuno dice: "Vedo tutto rosso". Kant risponde: "La spiegazione è che tu hai degli occhiali rossi e non te li puoi levare; per questo motivo vedi tutto rosso". Noi abbiamo qualche cosa nella mente che ci fa agganciare alla realtà fisica fuori di noi: sono le forme a priori a farci vedere il tempo e lo spazio come li vediamo e sentiamo.

Le geometrie non euclidee

La filosofia kantiana dominante ricevette un grosso colpo dalla nascita delle geometrie non euclidee. Queste geometrie nacquero verso la metà del XIX secolo, ed esse furono un grosso problema per l'impostazione kantiana della conoscenza. A questo proposito è chiarissimo quanto scriveva negli anni '50 Clara Angelini nella prefazione alla traduzione di *La scienza e l'ipotesi* di Henri Poincaré. Molto chiaramente la Angelini scrive che nella prima metà del secolo diciannovesimo erano sorte per opera di due matematici, Lobačevskij e Riemann, le geometrie non euclidee. La loro origine risale a tutti gli inutili tentativi che c'erano stati nei secoli per dimostrare il quinto postulato di Euclide, dove si afferma, come tutti sappiamo, che per un punto esterno ad una retta passa una e una sola parallela alla retta data. Una conseguenza del postulato è che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi. Lobačevskij e Riemann, indipendentemente, cercando di dimostrare questo postulato, idearono una dimostrazione per assurdo. Immaginando sia che per un punto esterno ad una retta si potessero condurre più di una, e quindi infinite, rette parallele, sia supponendo che non se ne potesse condurre nessuna. Ma alla fine, con grande meraviglia dei matematici, "invece dell'assurdo che ci si attendeva si constatò che erano nate due altre geometrie, uguali per rigore logico a quella euclidea".
In queste geometrie non euclidee la somma degli angoli interni di un triangolo non è 180 gradi ma di meno per l'una, di più per l'altra, ed inoltre questo eccesso o questo difetto dipendono da quanto grande è il triangolo. Più grande è il triangolo, più queste somme degli angoli interni differiscono da pi-greco (180°). Che effetto ebbero queste affermazioni sul collegamento tra matematica e filosofia? Lo dice molto nitidamente nel 1906 lo stesso Henri Poincaré, nel volumetto *La scienza e l'ipotesi*: "È vero forse che le proposizioni geometriche sono come pensa Kant? Se così fosse, cioè se la teoria kantiana della geometria fosse vera, esse ci si imporrebbero con tale forza nella nostra mente che non potremmo con-

cepire proposizioni contrarie né costruire con la nostra mente un edificio teorico. Le geometrie non euclidee in questo caso non esisterebbero".

La situazione diventa semplice nell'analogia degli occhiali rossi. Kant ci diceva: "Voi vedete rosso perché avete degli occhiali rossi sugli occhi e non ve li potete levare. A questo punto c'è qualcuno che dice: "Alt! Io vedo blu!" Un altro dice "No! Io vedo verde." Allora se alcuni vedono verde, qualcuno vede blu, la conclusione naturale è che gli occhiali rossi non ci sono. Da questo punto di vista può essere letta la scoperta delle geometrie non euclidee, in chiave antikantiana, perché viene a demolire la teoria delle forme trascendentali, perlomeno per quanto riguarda lo spazio.

Una piccola parentesi: ci sono stati dei tentativi per recuperare la forma trascendentale del tempo, soprattutto ad opera di Brouwer, il fondatore dell'intuizionismo.

Questa situazione storica è ben documentata, appunto perché basta leggere Poincaré. Non sono invece riuscito a trovare documenti su quello che sto per dirvi ora, ma mi sembra una conclusione abbastanza prevedibile. In sostanza qualcuno si sarà allora chiesto (dopo la scoperta delle geometrie non euclidee): ma a che cosa serve quindi la matematica? Fino ad allora, si era potuto pensare che la matematica costituisse un'adeguata descrizione della natura. Questo in sostanza era stato codificato già dal 300 a.C. con Euclide. Era stato scritto a chiare lettere da Galileo, quando ci spiegava nel *Dialogo sui massimi sistemi* che il libro della fede è una cosa, il libro della natura è un'altra cosa, quest'ultimo infatti era scritto in caratteri matematici. Si pensava che la matematica costituisse veramente un'adeguata descrizione della realtà. In un certo senso la *verità* delle proposizioni matematiche veniva pensata come una corrispondenza fra queste ed il mondo fisico esterno. Ovverosia si pensava: è vero che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi; infatti, se noi prendiamo tre cime di monti e costruiamo il triangolo e misuriamo col teodolite, viene 180 gradi. La *verità* matematica, la *verità* di queste asserzioni, era testata dalla realtà. Con le geometrie non euclidee e con la lettura di queste in chiave antikantiana, questo modo di concepire la *verità* matematica comincia ad essere messo in discussione. I matematici si rendono conto che non ha senso chiedersi se la geometria *euclidea* sia vera o falsa. Infatti non abbiamo nessun metodo per controllarla, anzi si è poi riusciti ad elaborare tre costruzioni logiche della geometria, rossa, blu e verde, di uguale rango, di uguale validità. Anche Karl Gauss, notissimo matematico, fu molto coinvolto in queste questioni, per due motivi. Primo perché sostenne di essere stato in realtà lo scopritore di una delle geometrie non euclidee prima di Lobačevskij. Scrive in una lettera a Bessel, altro matematico: "avevo scoperto queste geometrie non euclidee, però evitai di pubblicare qualsiasi cosa per timore delle strida del beoti che sarebbero sorte". Gauss si rendeva benissimo conto che se avesse pubblicato questi risultati, sarebbe andato pesantemente contro l'imperante teoria filosofica di Kant, e forse rischiava qualche cosa.

La libera citazione di Gauss è tratta dalla Storia del pensiero filosofico e scientifico di L. Geymonat. Il capitolo relativo è quello curato da C. Mangione.

Gauss stesso si rendeva conto di questo e tentò di verificare concretamente, nel nostro spazio reale fenomenico, quale fosse la somma degli angoli interni di un triangolo. Si recò sulla cima di tre monti in Germania, fece la triangolazione, però non concluse nulla, perché non trovò 180 gradi esatti, ma l'errore rientrava nell'errore di misura del teodolite.

Pare che in Germania Gauss sia più noto per questo che per altre cose; infatti se prendiamo la famosa banconota da 10 DM, che riporta su una faccia il ritratto di Gauss assieme al grafico della densità normale standard, vediamo che dall'altra parte c'è un teodolite sullo sfondo degli edifici di Gottinga. La Bundesbank, nella descrizione della banconota, dà più evidenza agli studi geodetici di Gauss che agli studi matematici e, se volete, geometrici o probabilistici.

La matematica come disciplina ipotetico-deduttiva

Allora - dicevo - che la situazione era un po' questa: i matematici sicuramente avevano motivo di preoccuparsi, perché a quel punto ci si poteva chiedere a cosa servisse la matematica se con essa non si poteva gestire la realtà. La risposta fu data da un gruppo di matematici che lavoravano tra Berlino e Gottinga negli anni fra il 1880 ed il 1900, il cui caposcuola fu sicuramente David Hilbert, nato come Kant a Königsberg.

Königsberg è famosa per tre cose: primo vi è nato Kant, secondo vi è nato Hilbert, terzo ci sono i famosi ponti di Eulero: non so se gli abitanti di Kaliningrad lo sappiano; Kaliningrad adesso è una città, ha ducentomila abitanti ed è in grande decadimento.

Hilbert propose questa soluzione al problema: "Va bene, la matematica non è immediatamente collegabile con la realtà perché è in effetti una scienza puramente ipotetico-deduttiva". Ovverosia, *la verità delle affermazioni matematiche non va testata confrontandola con la realtà esterna, ma va testata all'interno del sistema stesso.* Questa è un po' la matematica che noi conosciamo. Se la matematica è ipotetico-deduttiva prende degli assiomi, sviluppa delle proposizioni, quindi la verità di queste risiede esclusivamente nella verifica sintattica che le operazioni logiche siano portate avanti correttamente. La mia prima tesi, cioè che la impostazione ipotetico-deduttiva di Hilbert, poi presentata ufficialmente nel famoso discorso del 1900 sui fondamenti della geometria, sia stata motivata da questo stato di cose, è in effetti documentabile. Se uno va a vedere gli scritti della scuola di Gottinga qualche riferimento lo trova. In particolare nel 1934 un allievo di Felix Klein, Richard Courant scrive (nel 1934 ancora in Germania, e poi nel 1937 negli Stati Uniti), nell'introduzione del suo libro di *Calcolo differenziale e integrale,* che "questo fondamento della matematica ipotetico-deduttiva, è dettato da profonde esigenze filosofiche."

Queste *profonde esigenze filosofiche* sono quelle che vi ho detto, anche se non c'è un riferimento concreto. È quindi abbastanza documentato che la matematica che usiamo noi oggi è quella ipotetico-deduttiva, anche se ci sono attualmente molti fermenti da questo punto di vista; ma in effetti nessuno mette in dubbio che parlando di matematica si deve evidentemente fare dei ragionamenti logici e concreti, e tutto il resto.

Però, e questa è la mia tesi principale, io credo che occorra con molto scrupolo distinguere fra matematica dei professionisti e matematica da insegnare. Perché è interessante sapere che ci fu un'immediata reazione, anche abbastanza violenta, alla concezione della matematica hilbertiana come scienza puramente ipotetico-deduttiva. Per esempio E. Borel, uno dei fondatori del calcolo delle probabilità, scrisse nel 1922 che "le possibilità di ricondurre la geometria ad una teoria analitica ed algebrica puramente astratta non deve farci dimenticare l'origine concreta di concetti geometrici. Quando Hilbert ci dice pensiamo a tre sistemi di cose che chiameremo punti, rette e piani, e definiamo queste cose tramite assiomi come i seguenti: per due punti si può far passare una sola retta ecc., sappiamo benissimo che il signor Hilbert, non avrebbe affatto pensato a queste se Euclide non fosse vissuto prima di lui." Quindi in sostanza Borel afferma che in matematica ci sono dei contenuti fortemente intuitivi. Altri tipi di critica sono giunti da italiani, seppur implicitamente: mi riferisco a Bruno de Finetti nella sua opera *Matematica logico-intuitiva*, ma il tempo non mi consente di fare la citazione completa. Vorrei citare invece un matematico vivente, Vladimir Arnold. Egli scrive in un articolo del 1996 sulla rivista *Matematica e intelligenza*:

"All'inizio di questo secolo fu proposto in matematica, specie ad opera di Hilbert, un principio egualitario autodistruttivo, secondo il quale tutti i sistemi di assiomi hanno eguale diritto di essere analizzati; il valore di una proposizione matematica dipende non dal suo rilievo e utilità, come nelle altre scienze, ma dalla sua difficoltà intrinseca, come nell'alpinismo. Questo principio condusse rapidamente i matematici (questo è il punto principale), ad una frattura con la fisica e ad una separazione da tutte le altre scienze."

L'articolo era preceduto da una dichiarazione dell'editore che, sapendo di trattare un tema molto delicato, diceva: "Noi pubblichiamo questo articolo perché Arnold è persona molto importante, però la responsabilità di quanto asserito resta dell'Autore."

Credo quindi di poter individuare ***il problema dell'insegnamento della matematica nella frattura che c'è fra questa disciplina e tutte le altre scienze.***

Frattura che si può identificare in questa questa idea della matematica come scienza puramente ipotetica deduttiva, sorta dalla contrapposizione fra teorie filosofiche kantiane e geometrie non euclidee. Però è anche molto interessante andare a vedere cosa gli stessi fondatori, Hilbert e la sua scuola, dicono in proposito, e qui sta la seconda tesi di cui vi avevo parlato all'inizio.

■ 2. La rivalutazione dell'intuizione

D'altra parte, la seconda tesi di cui si è detto nell'Introduzione era che nel contesto dell'origine del problema c'è anche la soluzione del problema stesso. E la soluzione era molto banale perché bastava leggere quanto scrivevano gli stessi matematici della scuola di Gottinga, cioè della scuola di Hilbert, creatori della matematica "ortodossa", come la conosciamo oggi.

Richard Courant scrive nel 1934: "Il mio scopo è di mostrare le strette connessioni fra l'analisi e le sue applicazioni, senza perdere di rigore e di precisione e di dare il dovuto riconoscimento all'intuizione come sorgente della verità matematica. La presentazione di questa scienza come un sistema chiuso di verità, senza riferimento alle sue origini e scopi, ha un indubbio fascino estetico e soddisfa profonde esigenze filosofiche, ma il punto di vista della matematica logica astratta e chiusa in sé, come unica baseper la formulazione di fondamenti, come principio didattico per i principianti, cioè vedere la matematica come puramente ipotetica e deduttiva, è un grave pericolo. Mi sembra estremamente importante che lo studente sia messo in guardia fin dall'inizio nei confronti di un purismo oscuro per quanto comodo".

Perciò proprio la scuola di Gottinga ce lo dice: "Guardate, noi abbiamo creato questo sistema, questa matematica in forma ipotetica e deduttiva per nostre esigenze interne, di professionisti della matematica, però non dovete insegnarla in questo modo, perché questa è una esigenza interna della disciplina."

L'insegnamento, quindi, deve essere fatto ancora in base a delle intuizioni, perché altrimenti il principiante sarà portato su una via pericolosa, quella dello scollamento delle altre scienze, come poi in effetti è purtroppo successo.

La cosa particolarmente curiosa è che si può individuare in questa situazione che vi ho presentato (la affermazione di Hilbert del carattere ipotetico-deduttivo della matematica) una vera e propria rivoluzione scientifica. Ogni rivoluzione scientifica corrisponde, come sapete, a delle grosse discontinuità con il passato e alla comparsa di nuovi manuali. Anche per la matematica ipotetico-deduttiva si tentò di costruire un manuale, progettato da un gruppo di matematici franco-americani che si autonominarono "Compagnia o Gruppo Bourbaki" e tentarono di descrivere tutta la matematica su base ipotetico- deduttiva, in una serie di volumi che apparvero in successione per una ventina d'anni. Poi, penso per motivi naturali, il progetto si esaurì. E' interessante notare che gli stessi "Bourbakisti" dissero: "Attenzione, questa è una struttura che serve alla matematica, non va però insegnata così."

Siccome la gente non lo crede, io ho preso proprio l'introduzione del volume "Mode d'emploi de ce traité", il libretto d'istruzione del trattato del "Bourbaki". Essi affermano, e qui sembra che la frase sia dovuta a Jean Dieudonné, ... "Il trattato è destinato particolarmente a dei lettori che possiedono una buona conoscenza delle materie insegnate al primo o ai primi due anni dell'Università. L'importanza di alcune considerazioni sarà chiara soltanto quando il lettore avrà dapprima conseguito delle conoscenze abbastanza approfondite".

Ora, conoscendo professionalmente quella che è stata l'opera di Jean Dieudonné io posso effettivamente pensare che cosa lui intendesse con questo criterio "una conoscenza abbastanza approfondita delle materie insegnate al primo o ai primi due anni dell'università": penso che, probabilmente, io stesso non passerei questo test di Dieudonné. Sembra, ma personaggi così generano molte leggende, che Dieudonné negli ultimi anni avesse detto che di matematici veri al mondo ce n'erano due: lui era probabilmente uno. Quindi questa in realtà non è messa qui come una battuta: se un matematico di questo peso ci dice: prima di leggere questo trattato "dovete avere una conoscenza approfondita della matematica insegnata ai primi due anni dell'università", è evidente che la matematica che va insegnata ai primi due anni dell'università è *diversa*.

Quindi i bourbakisti stessi, così come la stessa scuola di Gottinga non propongono il metodo ipotetico-deduttivo come adatto all'insegnamento, ma insistono sul fatto che l'insegnamento deve essere di carattere intuitivo.

Credo che tutti concordiamo sul fatto che lo scopo dell'insegnamento della matematica non è di creare dei matematici professionisti, questo riguarderà forse l'uno o il due per cento della nostra popolazione di allievi, ma piuttosto quello di elevare la cultura matematica del Paese.

Quindi, quando insegniamo matematica, non dobbiamo pensare di dover creare dei nostri cloni, ma dobbiamo pensare a formare delle persone che sappiano leggere una percentuale o una tabella, che comprendano l'ordine di grandezza. In fin dei conti i nostri predecessori, i nostri maestri, sono riusciti a insegnare per molti anni teorie difficili e profonde senza avere nessun fondamento di tipo astratto. Lo stesso Courant riesce a trattare il calcolo delle variazioni senza aver discusso per lungo e per largo, come facciamo noi, i limiti delle funzioni reali. Invece per strani motivi siamo finiti per insegnare veramente soltanto nella linea del gusto del dimostrare. Dice Bruno de Finetti sulla dimostrazione: "Noi insegniamo la dimostrazione, però non si capisce per quale motivo lo studente debba essere obbligato a ripetere tutti i passaggi di una singola dimostrazione, come fosse possibile che in questa ci fosse un errore, sfuggito a tutti nel passato, tranne che a lui." Aggiunge poi che a uno che non è destinato a far il matematico professionista si deve piuttosto far capire il risultato di un teorema, da dove viene, il perché si studia quel teorema. Si devono proporre delle analogie concrete e mostrate delle applicazioni reali.

Ora qui mi rivolgo ai colleghi delle scuole superiori: un esempio paradigmatico in questo senso è il teorema di Rolle. La tradizione italiana sul teorema di Rolle ha comportato per molti anni una sua dimostrazione basata sul fatto che una funzione continua su un intervallo compatto ha un punto di massimo. Cosa che non viene poi generalmente dimostrata. Ora io dico: ha senso ricondurre una dimostrazione ad una cosa molto profonda come il concetto di funzione continua su di un insieme compatto, se non puoi dimostrare quest'ultimo concetto? E' solo un esercizio, è veramente una cattiveria, è un incrudelirsi dimostrare un teorema, rifacendosi ad un teorema che non dimostrate. Allora o si vuol fare la dimostrazione per la necessità di insegnarne una completa, o tanto vale fare subito delle applicazioni.

Mi diceva Halanay, un matematico romeno, su questo punto: "Il teorema di Rolle ha un tale contenuto intuitivo, che, una volta che uno ha capito che essere derivabile vuol dire che in ogni punto c'e' la retta tangente, è poi molto meglio darlo come fatto intuitivo, e poi, immediatamente, farne delle applicazioni." Molto meglio sarebbe in sostanza dare il teorema di Rolle come fatto intuitivo e subito parlare di interpolazione "lagrangiana" in tabelle di dati (dove, per dare una stima dell'errore, si usa il teorema di Rolle molte molte volte).

Noi siamo stati condotti a insegnare in un modo che, secondo me, ha portato la maggior parte dei nostri ragazzi e ragazze a scollegarsi dalla realtà, ad apprendere in maniera assolutamente acritica quello che gli stavamo insegnando. La matematica viene spesso studiata come una "cerimonia da compiere scrivendo", mentre dovrebbe essere una "realtà da capire pensando".

Il fatto che la matematica venga da ragazze e ragazzi spesso assimilata ad una cerimonia, ad un fatto di *bon ton* insomma, potrebbe essere confermato dalla espressione che gran parte di essi usano quando, in un'interrogazione alla lavagna, commettono qualche errore: "Mi scusi…" , come se l'errore fosse stato un'offesa all'insegnate, una mancanza di educazione, il mancato rispetto di un galateo. Chi dice "mi scusi" vede solo *formalità* in quello che sta facendo. Pensiamo all'atleta che si allena in uno sport: al suo allenatore che gli fa notare un errore nella posizione delle braccia, non dirà mai: "Mi scusi", perché sa che il suo errore causa danno solo a lui stesso e non certo all'allenatore. Dirà caso mai: "Ah… grazie!".

■ 3. Come collegarsi alla realtà, qualche esempio "plebeo"

Allora, in sostanza, per arrivare al nucleo della situazione italiana quali proposte possibili? Cosa si può imparare da questa storia? Da questa storia si può imparare un suggerimento: *cerchiamo di collegare sempre il più possibile la matematica alla realtà.* E questo che cosa vuol dire? Per esempio, usare delle analogie. Bruno de Finetti diceva: "E' veramente sbagliato, quando si parla di ellissi, non fare presente che, se si prende un salame e lo si affetta con un coltello piano, la sezione è un ellisse." "Non c'è da aver paura - dice sempre il de Finetti - di scendere troppo nel *plebeo* (usa esattamente questo termine), perché è questo che fa fissare nella mente del ragazzo l'idea di un cilindro sezionato con un piano." Per esempio un altro tipo di analogia che si può fare è questa. Grandezze commensurabili e incommensurabili possono venire presentate o no. Ma se vengono presentate si può fare l'esempio del lato del pentagono regolare e della diagonale. Questo sembra sia stato storicamente il primo caso di grandezza incommensurabile scoperta dai pitagorici: per loro questa stella pitagorica era il simbolo della scuola. Fate una domanda di questo genere: "Cosa vuol dire che due segmenti sono incommensurabili? Se la risposta è che non c'è unità di misura comune, allora raccontate questa storiella inventata.

"Pitagora aveva commissionato ad un piastrellista di fargli all'entrata della sua scuola a Crotone, una bella stella pitagorica. Il piastrellista aveva messo un certo numero di piastrelle sul lato e poi per fare la diagonale ne aveva rotta una." L'incommensurabilità di due lati, significa esattamente questo: comunque piccola si prenda una piastrella non si riesce con un numero finito di piastrelle intero a disegnare entrambi i segmenti; bisogna sempre rompere una piastrella.

Fra l'altro, le analogie che io propongo, non sono soltanto in funzione di attirare l'attenzione, ma sono sostenute anche da parte di alcuni neuropsicologi. In particolare sembra che questi tipi di cose mettano in movimento aree cerebrali diverse; questo consentirebbe un maggior deposito della informazione nel cervello. Lo dico solo per informazione, perché non ci sono studi specifici sull'apprendimento della matematica, però se voi parlate con uno di questi neuropsicologi vi diranno: sicuramente mettere insieme il salame, che sarà in una certa area cerebrale, e l'ellisse, che sarà in un'altra, crea un link fra queste aree che rafforza il deposito dell'informazione.

Un altro esempio può riguardare il teorema di Pitagora. il teorema di Pitagora. Se un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 3 e 4, l'ipotenusa è lunga 5. Nel contesto pratico serve a poco: se siamo in grado di misurare i cateti col metro del muratore o col distanziometro laser, non si capisce perché non possiamo con gli stessi strumenti misurare anche l'ipotenusa. Il suo inverso, cioè se un triangolo ha i lati lunghi 3, 4 e 5 allora l'angolo opposto al lato più lungo è un angolo retto, potrebbe essere invece molto utile nella pratica quotidiana. Racconta Mauro Cerasoli, professore a L'Aquila, che il muratore che doveva costruire un pollaio teneva in tasca una cordicella con una serie di nodi equidistanti. Per tracciare a terra un angolo retto (per un pollaio a base rettangolare) inchiodava la cordicella al suolo in un nodo, tirava quattro

nodi da una parte e tre dall'altra, e se la cordicella "chiudeva" con un terzo lato di cinque nodi, era certo di avere l'angolo voluto.
Trovo molto importante questo tipo di analogia per collegare la matematica alla realtà. Un'altra osservazione ancora sugli ordini di grandezza, che vanno sicuramente considerati. Per esempio, cosa vuol dire che un'autostrada costa dieci miliardi al chilometro? Dieci miliardi al chilometro sono dieci milioni al metro. Camminando in un'aula, un passo dopo l'altro, si conta il costo: dieci milioni, venti milioni, trenta milioni, quaranta milioni, cinquanta milioni, … Gli ordini di grandezze portano automaticamente a certe valutazioni degli esponenti, poi del logaritmo. Un altro esempio sempre sull'ordine di grandezza. Quattrocentomila sono per esempio le coppie di basi del DNA del primo lievito sequenziato completamente, mentre 3.3 10^9 sono le coppie di basi del genoma umano, e pare sia stato completamente sequenziato. Se abbiamo dei CD, e dobbiamo registrarci sopra il genoma umano, quanti CD sono necessari per 3.3 10^9, simboli A, T, C e G?
La scelta di uno su quattro simboli richiede 2 bit (per esempio: A = 00, T=11, C=01, G=10), tutto il genoma richiede 6.6 10^9 bit = 8.25 10^8 bytes = 8. 10^5 Kb = 781 Mb, poco più di un CD da 640 Mb. Salvo errori…
Ancora esempi "plebei": imparare a trafficare con il numero 1936.27, trovare delle facili forme di conversione lira-euro, quindi ordine di grandezze. E ancora le percentuali: è molto importante che il cittadino sia abituato a pensare in termini di percentuali, e che sappia che le percentuali non si sommano, cioè 10% e ancora 10% non fa 20%. Una delle domande che fa terrorizzare i miei studenti di scienze naturali è la seguente: "Un vitello ingrassa in un anno del 10%, l'anno dopo dimagrisce del 10%, pesa come prima o no? Questo è un problema perché può suscitare un po' di atteggiamento rilassato, però voi vedete la pubblicità di banche che dicono: "4%, - vi sembra poco?" A parte che secondo me 4% è poco, a parte questo, poi però uno va a leggere più approfonditamente e scopre che è 4% ogni due anni e allora quant'è ogni anno? Saper lavorare con le percentuali chiarisce queste ambiguità. Questa è una cosa importante credo per il cittadino comune. Il fatto che i pubblicitari ritengano efficaci frasi come "Riduce le rughe fino al 37.5%.", oppure "Contiene il 75% di colesterolo in meno.", indica che la percentuale resta uno strumento concettuale d'élite. Non nel senso che i pubblicitari non conoscano le percentuali, ma nel senso che la percentuale viene ritenuta una parolona che ammanta di scientificità paludata (tanto piu' scientifica quanto più incomprensibile) gli ingredienti di una cremetta dermatologica da banco o di una margarina.
Non ultimo sarebbe il discorso di cercare di mettere insieme un po' di probabilità e statistica nell'insegnamento di base: e anche questo è un argomento un po' delicato. Il teorema di Rolle non sposta molti soldi, ma una cosa come la legge dei grandi numeri, che si può enunciare anche molto semplicemente, sposta miliardi. Li sposta perché molta gente gioca al lotto basandosi sulla pretesa comprensione della legge dei grandi numeri. Fra l'altro, se il numero tale non esce da vari mesi, proprio per quella legge non sarebbe da giocarlo, perché vuol dire che la roulette è truccata. Se si va al Casinò di Montecarlo, dove non esce il 34 da due anni, non si dovrebbe giocare quel numero, perché la roulette è rovinata, la casella è rotta.
Giustamente dice il ministro nella circolare che presenta il progetto SeT: "Situazioni che richiedono un po' di analisi, un po' di conoscenza matematica di base, possono trovare il cittadino completamente sprovveduto." Questo è molto giusto, siamo noi insegnanti di matematica un po' responsabili di questo. Prenderei a prestito addirittura una frase di Papa Woityla: "Non c'è da aver paura, se c'è qualche cosa che ci sembra cozzi con il buon senso è sicuramente sbagliato.", cioè bisogna insegnare la matematica del buon senso ai non matematici, ai non professionisti. E se c'è qualche cosa che vi sembra che non vada bene non fatela, perché evidentemente cozza contro il buon senso.
Una cosa che è stimolante per i ragazzi è la caccia all'errore sui "media". Per esempio, credo che fosse stato proprio ieri sera, in "Striscia la notizia" hanno beccato uno che ha parlato di una giraffa alta 16 metri. Secondo me erano 16 piedi, perché 16 piedi sono ragionevoli per una giraffa, però chiunque si deve rendere conto, quando parla, di che cosa siano 16 metri. Quanto è alta una casa di quattro piani?, non so, venti metri, trenta metri? Dovremmo, dove è possibile, cercare anche di fare un po' di *campagna matematica*, di lavoro matematico in campagna. Per esempio, secondo me, non c'è nessun miglior sistema per imparare seno, coseno e tangente che andare veramente nel cortile della scuola, mettere una stanga, cercare di misurare un angolo in qualche maniera, fare un po' i conti. E' la realizzazione concreta degli algoritmi che consente di comprendere le formule, questo è il punto chiave.

■ 4. Un posto nello zaino per la calcolatrice

Da ultimo, visto che mancheranno pochi minuti, credo che la possibilità che abbiamo oggi di portare nelle scuole le calcolatrici tascabili sia un grande vantaggio che ci viene offerto dalla tecnologia. E' di questi giorni un grande dibattito sulla rivista "Lettera Matematica Pristem", sul divieto di usare le calcolatrici grafiche agli esami di maturità. In realtà ci sono dei pro e dei contro sull'uso della calcolatrice, però il problema non è vietare o non vietare. Il problema è modificare l'insegnamento in maniera che le calcolatrici siano realmente necessarie. Effettivamente usare la calcolatrice solo per fare un grafico è inopportuno, anche solo per far passare una retta fra due punti è forse inopportuno. Sarebbe interessante poter fare un esempio di questo genere: abbiamo 25 studenti in aula, misuriamo altezza e peso di ciascuno, (lasciamo che le ragazze imbroglino un po' sul peso), possiamo fare una retta di regressione, questo la calcolatrice lo può fare; fare la regressione su 25 punti, a mano, può essere un po' seccante. Soltanto la realizzazione dell'algoritmo in pratica consente di capire però la difficoltà concreta della formula. Questa è una grande possibilità offerta dalla calcolatrice, ma non solo. Perché io inviterei anche ad usare queste macchine, come finora non è stato troppo evidenziato nelle publicazioni in materia, veramente a livello concettuale. Perché queste macchine potrebbero essere per noi una ottima sorgente concettuale, analoga al laboratorio per il corso di chimica. Allora, secondo me, non c'è alcun miglior modo di mostrare la derivabilità di una funzione, che farne il grafico e fare gli zoom ripetuti; con abbastanza zoom la funzione diventerà indistinguibile, nell'ambito del pixel, da una retta. Questa è la retta tangente e fra l'altro è anche una definizione corretta, perché

l'epsilon sarebbe il pixel e per ogni soluzione c'è uno zoom abbastanza potente che vi confonde il grafico con la retta. Questa è una sperimentazione abbastanza concreta. Se invece prendete una cosa non derivabile, tipo un valore assoluto di qualche funzione, o quello che volete, fate quanti zoom volete, lo spigolo non andrà via; lo spigolo è invariante per zoom, in sostanza non derivabile. Quindi si può usare la calcolatrice a livello di concetti, e soprattutto integrando probabilità, statistica, ecc., perché il pulsante random delle calcolatrici può essere quanto di più interessante ci sia, per poter fare un po' di simulazione, di sperimentazione.
Lanciate un dado duecento volte per la calcolatrice, fate l'istogramma delle frequenze, cominciate a presentare in questo modo, a sperimentare la legge dei grandi numeri; certamente non avremo la teoria assiomatica, però non credo che ce ne sia bisogno. Credo che veramente per i non matematici, per quella che è la cultura matematica del Paese, sia necessario avere una matematica pratica. Infatti io sono assolutamente convinto che *non* è sufficiente creare la mentalità matematica per poi saper fare un buco col trapano. Noi creiamo la mentalità matematica, poi uno che ha la mentalità matematica dovrebbe saper risolvere qualunque problema: secondo me non è totalmente vero. Questo sarà vero per il matematico professionista, ma per la media di chi poi dovrà diventare un'altra cosa questo non è vero. Ci vuole un contatto con la realtà e quindi io vi inviterei nell'ambito di questo progetto, che mi sembra estremamente ben fatto, a riportare la matematica nel contesto delle altre scienze; nel modo che potete, nel modo che sapete sicuramente fare; basta avere un po' di coraggio e farlo.

Per commenti su questo testo scrivete a:
inverniz@univ.trieste.it
L'autore:
Prof. Sergio Invernizzi
Dipartimento di Scienze matematiche - Edificio H2
Università di Trieste
Via Alfonso Valerio, 12/1
34100 Trieste.

CABRI INFORMA

Materiali NCTM: Curricoli di matematica in verticale

di Anna Maria Arpinati
IRRSAE Emilia Romagna

Nella primavera 1999, sulla lista di discussione Cabrinews, apparve la notizia che nel sito americano
http://www.nctm.org/standards2000/
era presente un interessante documento, a cura del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) relativo al curricolo di matematica nei diversi ordini di scuola. Rintracciammo il documento, il cui titolo esatto era:" Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft – october 1998". Ne facemmo una rapida lettura a campione e capimmo che era un materiale interessante per il mondo della scuola italiana in cui, proprio in quei mesi, si cominciava a parlare di nuovi curricoli, di competenze, di nuclei fondanti. Duplicammo il documento e lo distribuimmo a colleghi ed amici in una cinquantina di copie. Tali colleghi ed amici lo studiarono con cura ed il parere fu unanime: se pur con i dovuti distinguo fra la situazione statunitense e quella italiana, il documento era ricco di spunti interessanti anche per la nostra scuola. In breve tempo apparve pero' chiaro che un grave ostacolo ad una ulteriore e più capillare diffusione dello scritto era senza dubbio la sua redazione in lingua inglese: molti colleghi infatti conoscono bene tale lingua, ma molti altri non ne hanno la dovuta confidenza per poter leggere con scioltezza le indicazioni e gli esempi riportati nella Discussion Draft. Prendemmo allora la decisione di tradurre l'intero documento in lingua italiana, scommettendo sulla formula della cooperazione in rete e dei crediti formativi per ragazzi e classi degli Istituti Superiori. Contemporaneamente partirono le trattative per ottenere, dagli estensori del documento stesso, il permesso per renderlo di pubblico dominio, nella sua traduzione italiana. In autunno 2000 tale permesso è arrivato e ringraziamo in modo particolare Mrs. Jean Carpenter che ha seguito le varie fasi della trattativa. Finalmente siamo giunti a termine dell'opera di traduzione!
Dai primi di Febbraio 2001 tutto il materiale tradotto, in formato PDF, sarà a disposizione, dei colleghi che vorranno consultarlo, presso il sito dell'IRRSAE rispondente all'indirizzo:
http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto/
(è sufficiente cliccare sull'icona riportante la sigla NCTM).
Siamo consapevoli del fatto che, pur essendoci adoperati per fare le cose al meglio (i materiali tradotti dai ragazzi sono stati revisionati da più collaboratori), nella traduzione potranno essere presenti ancora alcune inesattezze, quali ad esempio:
- alcuni errori presenti nella versione inglese (non dimentichiamo che il documento originale era una "discussion draft"), sono rimasti anche nella versione italiana;
- in alcuni disegni (specie i protocolli di lavoro dei ragazzi) sono ancora leggibili le scritte in lingua originaria;
- su alcune convenzioni terminologiche non tutti saranno d'accordo (ricordiamo, come unico esempio che c'è chi sostiene che il termine inglese "patterns" è praticamente intraducibile in lingua italiana, e c'è invece chi sostiene che la sua traduzione in "modello", va benissimo);
- ed altre ancora …

Piuttosto che ritardare nella diffusione di questo documento, per renderlo sempre più esatto, preferiamo offrirlo all'attenzione di quanti vorranno leggerlo con lo spirito con cui è nato: è semplicemente una bozza di lavoro che vuole essere una base di discussione fra tutti coloro che si occupano dell'insegnamento-apprendimento della matematica in qualsiasi ordine di scuola.
Dichiariamo fin d'ora la nostra gratitudine a quanti vorranno segnalarci refusi ed errori: siamo infatti del parere che… tutto è perfettibile!
Ci sembra corretto anche segnalare che, mentre noi ci adoperavamo per tradurre il documento dall'inglese all'italiano, negli Stati Uniti sono nate alcune voci in forte contrasto con la linea seguita da NCTM; si veda ad esempio il sito:
http://www.mathematicallycorrect.com, o le opinioni del prof. H. Wu sul sito: www.math.berkeley.edu/~wu (in sintesi, la posizione NCTM viene accusata di essere intrisa di troppa pedagogia). Ricordiamo ancora come, a nostro parere, il testo edito da Pitagora Editrice: La Matematica – dalla scuola materna alla maturità (proposte di un percorso globale per l'insegnamento della matematica) a cura di Lucia Grugnetti e Vinicio Villani (ISBN 88-371-1057-x), rimanga forse il riferimento migliore per quanti vogliano seriamente dedicarsi alla stesura di un curricolo verticale di matematica.
I docenti interessati a queste tematiche potranno pertanto darsi da fare, percorrendo anche filoni diversi di pensiero. E' nostro auspicio infatti che su temi tanto importanti per il nostro sistema scolastico il dibattito debba essere il più possibile ampio e diversificato.
Auguri di buon lavoro a tutti!

COME FARE

media inferiore

Equivalenza per differenza

e dimostrazione del Teorema di Pitagora secondo Bretschneider[1]

di Maddalena Di Vincenzo
Scuola Media "Tiepolo" - Milano

All'inizio della seconda Media, quando si affronta lo studio della equivalenza di figure piane, non è molto semplice far capire l'equivalenza di figure piane per differenza di figure equivalenti, in quanto questa è una proprietà non molto intuitiva e, in ogni caso, difficile da osservare direttamente.
Questo lavoro, realizzato con Cabri II, permette, attraverso il dinamismo e i "colori" delle figure, di scoprire la suddetta proprietà, di familiarizzare con gli aspetti invarianti, di esaminare le caratteristiche dei parallelogrammi che si formano e quindi arrivare lungo un percorso logico e consequenziale al teorema di Pitagora .
La costruzione può seguire altri percorsi che utilizzino le isometrie studiate precedentemente e quindi arricchirsi di contenuti; attraverso l'esame dei parallelogrammi sulle ipotenuse si potranno formulare problemi relativi alle condizioni che si devono verificare perché il parallelogramma sia un rettangolo, un quadrato (e un rombo?…). Inoltre il calcolo delle aree permette eventuali ampliamenti nell'ambito del calcolo letterale.

■ Prerequisiti:

1. Criteri di congruenza dei triangoli.
2. Conoscenza delle caratteristiche dei parallelogrammi.
3. Conoscenza delle isometrie.

■ Scheda di lavoro

- Cotruisci con la MACRO due quadrati congruenti.
- Indica con P un punto interno al primo quadrato.
- Manda per P le perpendicolari ai lati del quadrato.

Osserva che il quadrato resta diviso in quattro rettangoli.

- Traccia una diagonale per ciascuno dei due rettangoli posti su vertici opposti (fai in modo che una sola delle due diagonali abbia l'estremo in P).
- Ridisegna i quattro triangoli rettangoli che si saranno formati.
- Nascondi le due perpendicolari.
- Riempi con colori uguali i triangoli congruenti.
- Osserva la figura ottenuta: i due rettangoli indivisi hanno i lati congruenti ai cateti dei triangoli rettangoli.
- Muovi il punto P ed osserva le varie situazioni.

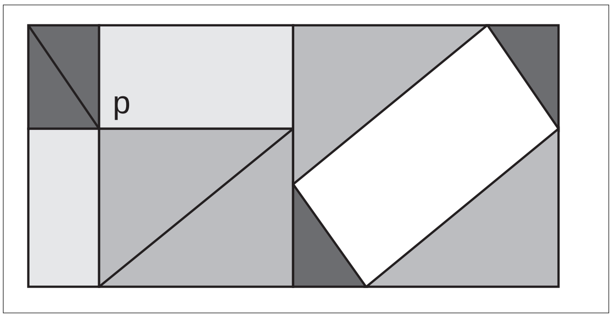
Devi ora traslare ogni coppia di triangoli congruenti sui vertici opposti del secondo quadrato.

- Disegna un vettore per ogni triangolo, dal vertice dell'angolo retto a ciascun vertice del secondo quadrato facendo in modo che ogni triangolo possa essere traslato mantenendo i cateti paralleli ai lati del quadrato.
- Trasla ogni triangolo.
- Nascondi i vettori e osserva la nuova figura:

Potevi eseguire altri movimenti per ottenere lo stesso risultato?

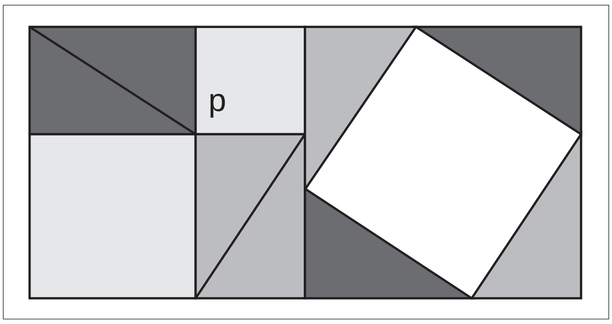
Come puoi notare, le ipotenuse dei triangoli rettangoli delimitano un parallelogramma.
Confronta l'area di tale parallelogramma con la somma delle aree dei rettangoli costruiti sui cateti dei triangoli rettangoli: cosa puoi dire?

- Muovi ora il punto P e osserva le varie situazioni:



Quando si formano due quadrati, come sono i triangoli? E quindi, che tipo di parallelogramma si è formato nel secondo quadrato?

Quando i due rettangoli indivisi diventano quadrati puoi concludere che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa?



(1)Una dimostrazione del teorema di Pitagora secondo Bretschneider è già apparsa sul bollettino N. 3, realizzata mediante il Cabri 1.7

media superiore

Esame di stato

per il Liceo Scientifico
Corso di ordinamento

di Isidiro Sciarratta
Liceo Scientifico

Come ormai è consuetudine da alcuni anni all'inizio del Tema di Matematica si trova la dicitura:
"Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva" e termina con le diciture:
"Durata massima della prova: 5 ore"
"E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile"

■ Problema 1

Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:

$$\int_0^1 f(x)dx = 2 \quad e \quad \int_0^2 f(x)dx = -5$$

a) Di ciascuno dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx,\ \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx,\ \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx,\ \int_0^1 f(2x)\,dx$$

dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore ed in caso di risposta affermativa qual'è questo.

b) Posto:

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

dove a, b, c sono parametri reali con a≠0, determinare le curve di equazione y = f(x) che soddisfano alle condizioni [1].

c) Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima.

d) Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata -4.

e) Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

Risoluzione

▼ quesito a)

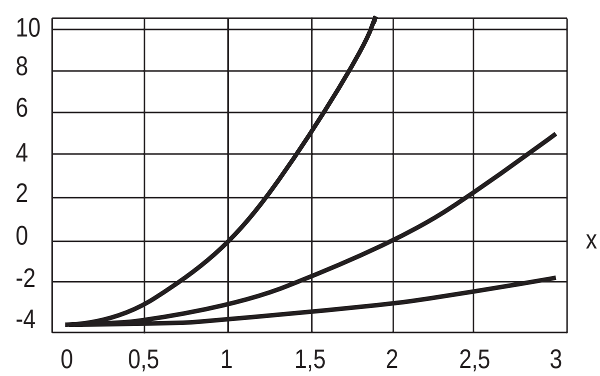
Prima di rispondere al quesito, al fine di renderlo più esplicito, facciamo le seguenti considerazioni di natura grafica. Consideriamo a titolo di esempio la funzione:

$$f(x) = x^2 - 4$$

e quelle che da questa si ottengono ponendo ora (x/2) ora (2x) al posto di (x), ovvero:

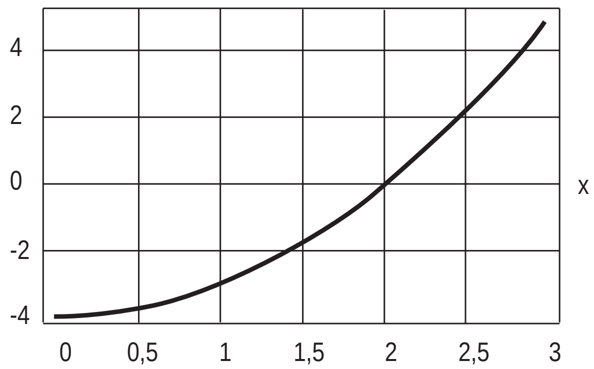
$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 4; \quad f(2x) = (2x)^2 - 4$$

```
Plot[{x²-4, (x/2)²-4, (2x)²-4}, {x,0,3}, Frame -> True, GridLines ->
Automatic, PlotStyle ↦ {{Thickness [0.009], RGBColor [1,0,0]},
{Thickness [0.006], RGBColor [0,1,0]}, {Thickness [0.009],
RGBColor [0,0,1]}, AxesLabel -> {"x", "f(x), f(x/2), f(2x)"}];
```

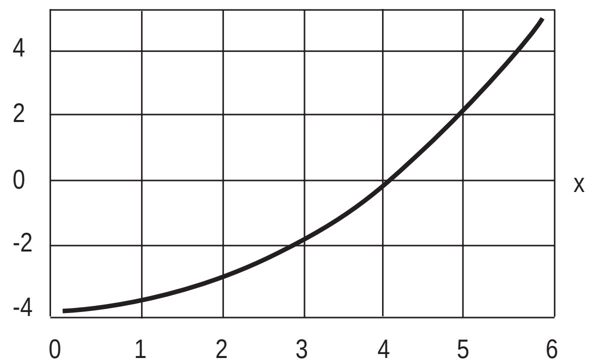


Proviamo a rappresentarle in uno stesso intervallo, ad esempio l'intervallo chiuso (0,3).
E' facile concludere che fra i tre grafici non sussiste alcun rapporto.
Se, al contrario, rappresentiamo, ad esempio,
f(x) nell'intervallo chiuso (0,3),
f(x/2) in (0,6) ed
f(2x) in (0,3/2),

Plot [x²-4, {x,0,3}, Frame -> True,
GridLines -> Automatic,
PlotStyle ↦ {Thickness [0.006], RGBColor [1,0,0]},
AxesLabel -> {"x", "f(x)"}];

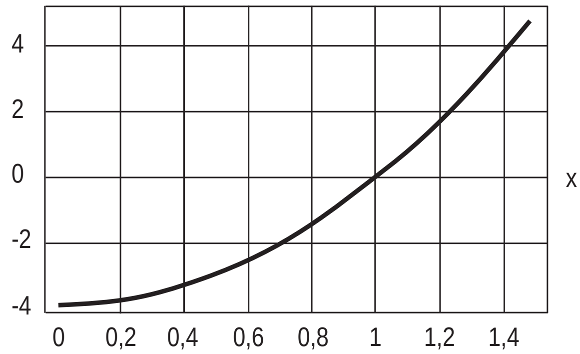


Plot[(x/2)²-4, {x,0,6}, Frame -> True,
GridLines -> Automatic,
PlotStyle ↦ {Thickness [0.009], RGBColor [1,0,0]},
AxesLabel -> {"x", "f(x/2)"}];



dal confronto dei rispettivi grafici è facile concludere che la funzione f(x/2) prende tutti i valori della funzione f(x) in un intervallo di ampiezza doppia e quindi il corrispondente integrale vale il doppio, mentre la f(2x) lo fa in un intervallo di metà ampiezza ed il corrispondente integrale vale la metà.

Plot[(2x)²-4, {x,0,3/2}, Frame -> True,
GridLines -> Automatic,
PlotStyle ↦ {Thickness [0.009], RGBColor [0,0,1]},
AxesLabel -> {"x", "f(2x)"}];



Da quanto fin qui osservato segue che:

$\int_0^1 \left(\frac{x}{2}\right)dx$ non si può esprimere;

$$\int_0^2 \left(\frac{x}{2}\right)dx = 2 \ast \int_0^1 f(x)dx = 4$$

inoltre, poiché

$$\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2 \ast \int_0^2 f(x)dx = -10$$

segue che:

$$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2 \ast \left[\int_0^2 (x)dx - \int_0^1 f(x)dx\right] = 2[-5-2] = -14$$

Ed infine:

$$\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = -\frac{5}{2}$$

▼ quesito b)

Poiché

$$Integrate\left[ax^3 + bx + c, \quad \{x,0,1\}\right]$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + c$$

mentre

$$Integrata\left[ax^3 + bx + c, \quad \{x,0,2\}\right]$$

$$4a + 2b + 2c$$

per raggiungere l'equazione della famiglia richiesta è sufficiente risolvere rispetto ad uno dei parametri il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 2 \\ 4a + 2b + 2c = -5 \end{cases}$$

Ad esempio, assunto *a* come parametro, dopo qualche semplice passaggio risolvendo si ottiene:

$$Solve\left[\left\{\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c=2,\quad 4a+2b+2c=-5\right\},\quad \{b,c\}\right]$$

$$\left\{\left\{b\to\frac{1}{2}(-18-7a),\quad c\to\frac{1}{2}(13+3a)\right\}\right\}$$

$$a=a,\quad b=-\frac{7}{2}a-9,\quad c=\frac{13}{2}+\frac{3}{2}a$$

da cui segue la funzione

$$f(x)=ax^3+\left(-\frac{7}{2}a-9\right)x+\left(\frac{13}{2}+\frac{3}{2}a\right)$$

▼ quesito c)

Le prime due derivate della precedente famiglia di cubiche sono rispettivamente:

$$f'(x)=\left(-\frac{7}{2}a-9\right)+3ax^2$$

$$f''(x)=6ax$$

Poiché la derivata seconda è un polinomio di primo grado, qualunque sia il valore di $a\neq 0$, ammette un solo zero (in questo caso $x=0$), che peraltro impone un cambiamento di segno della derivata seconda, e da qui segue ancora uno ed uno soltanto punto di flesso.

▼ quesito d)

E sufficiente risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 6ax=0 \\ ax^3+\left(-\frac{7}{2}a-9\right)x+\left(\frac{13}{2}+\frac{3}{2}a\right)=-4 \end{cases}$$

da cui, per la legge dell'annullamento del prodotto applicata alla prima equazione, si ottiene facilmente:

$$Solve\left[\left\{6ax=0,\quad ax^3+\left(-\frac{7}{2}a-9\right)x+\left(\frac{13}{2}+\frac{3}{2}a\right)=-4\right\},\quad \{a,x\}\right]$$

$$\left\{\{a\to -7,\quad x\to 0\},\quad \left\{a\to 0,\quad x\to\frac{7}{6}\right\}\right\}$$

Per le ipotesi del problema soltanto la prima soluzione risulta accettabile. Essa consente di ricavare:

$$a=-7,\quad b=\frac{31}{2},\quad c=-4$$

$$b=-\frac{7}{2}(-7)-9=\frac{31}{2}$$

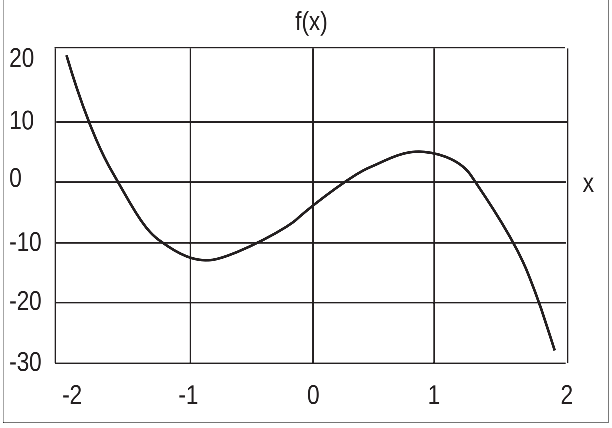
$$c=\frac{13}{2}+\frac{3}{2}a=\frac{13}{2}+\frac{3}{2}(-7)=-4$$

da cui segue la funzione

$$f(x)=-7x^3+\frac{31}{2}x-4$$

il cui grafico è

```
Plot[-7x³+(31/2)x-4, {x,-2,2}, Frame -> True,
GridLines -> Automatic,
PlotStyle -> {Thickness [0.009], RGBColor [1,0,0]},
AxesLabel -> {"x", "f(x)"}];
```



▼ quesito e)

Per rispondere a questo quesito è sufficiente riflettere sulla natura della derivata prima. Poiché risulta un polinomio di secondo grado ne deriva che a seconda della natura degli zeri di tale polinomio la cubica, corrispondentemente, ammetterà o non ammetterà punti estremanti.

Per risalire alla natura degli zeri di un polinomio di secondo grado occorre e basta studiare il segno del discriminante. Si ha:

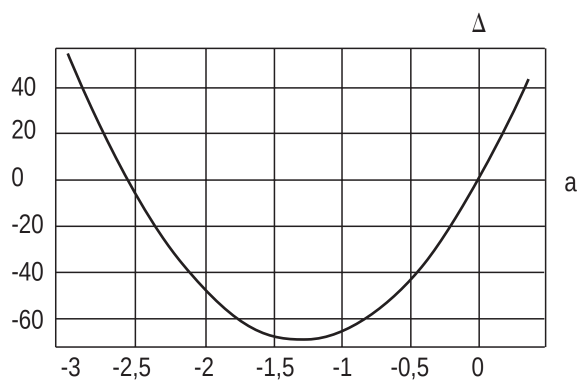
$$f'(x)=\left(-\frac{7}{2}a-9\right)+3ax^2$$

di cui bisogna studiare il segno del discriminante

$$\Delta=-12a\left(-\frac{7}{2}a-9\right)$$

di cui segue il grafico.

```
Plot[-12a (-7/2 a-9), {a,-3,0.4}, Frame -> True,
GridLines -> Automatic,
PlotStyle -> {Thickness [0.009], RGBColor [1,0,0]},
AxesLabel -> {"a", "Δ"}];
```



Si vede subito dal grafico del discriminante che le cubiche che ammettono massimi e minimi, ovvero le cubi-

che che ammettono punti estremanti, corrispondono ai valori del parametro *a* esterni all'intervallo (-18/7 ; 0).
Per tutti i rimanenti valori del parametro *a* si ottengono cubiche che presentano soltanto un flesso.
In particolare per *a* = -18/7 e per *a* = 0 si hanno cubiche con flesso a tangente orizzontale.

***

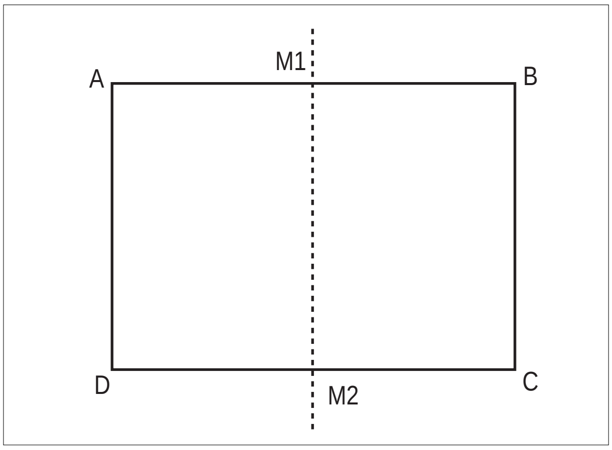
■ Problema 2

Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata *a*.

a) Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.
b) Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi con il piano del rettangolo dato un angolo di coseno $2/\sqrt{13}$. Calcolare il volume della piramide di vertice V e base ABCD.
c) Condotto il piano α parallelo al piano della faccia VAD della piramide ad una distanza *x* da questo, in modo però che α sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di *x* l'area del poligono sezione.
d) Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano α divide la piramide nel caso in cui *x* = *a*/2.

Risoluzione

▼ quesito a)

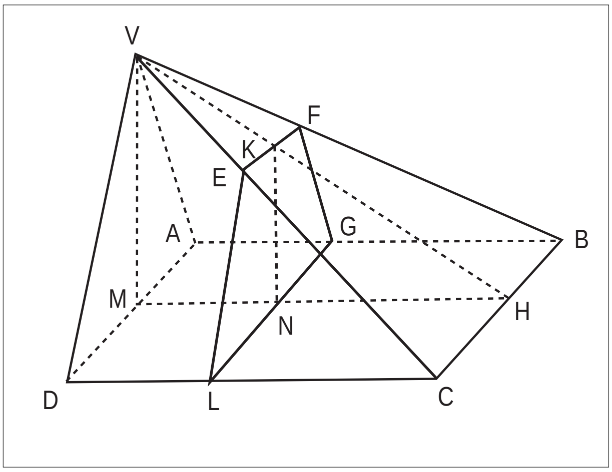


$\overline{AB} = \overline{BC} = a$ per ipotesi
Poniamo
$\overline{AD} = \overline{BC} = x$
Per le ipotesi del problema vale la seguente proporzione
a : x = x : a/2
da cui si ricava che

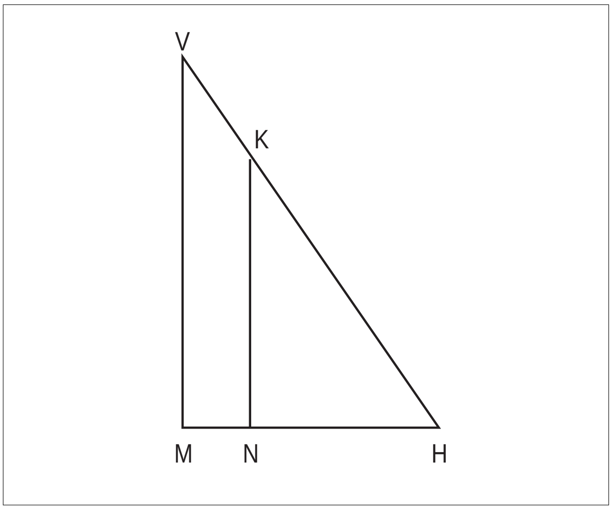
$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

▼ quesito b)

Seguendo la costruzione imposta dal problema si ottiene il seguente solido



E' facile rendersi conto del fatto che il quadrilatero sezione della piramide con il piano α è un trapezio isoscele. Quindi segue, per costruzione, che il triangolo KNH è retto e simile al triangolo VMH.



Poiché $\overline{MH}$ = a per ipotesi, mentre

$$\cos(VHM) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

si ricava che

$$\overline{VM} = a * \tan\left\{ArcCos\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right]\right\} = a * \frac{3}{2} = \frac{3}{2}a$$

e con Pitagora

$$\overline{VH} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}a$$

Il volume della piramide V(ABCD) vale:

$$V(ABCD) = \frac{1}{3}\left(a * \frac{a}{\sqrt{2}}\right) * \frac{3}{2}a = \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}a^3$$

▼ quesito c)

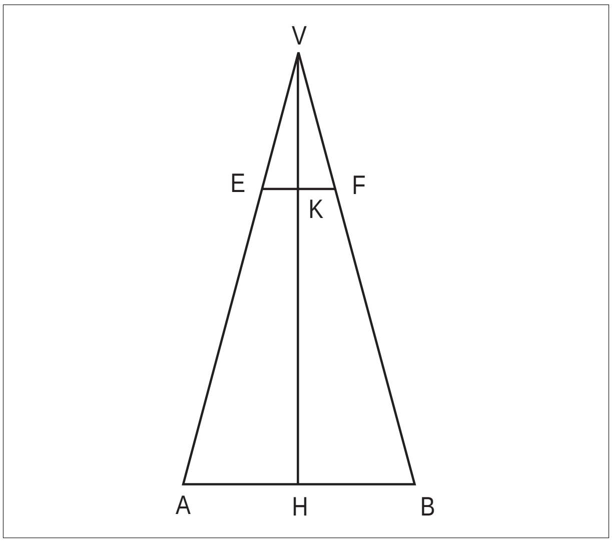
Ma allora, posto per ipotesi MN = x, segue NH = (a-x).
Inoltre dato che i triangoli VMH e KNH sono simili, segue:

$$\overline{KN} = \frac{3}{2}(a - x)$$

e che

$$\overline{KN}=\frac{\sqrt{13}}{2}(a-x)$$

Con i dati fin qui acquisiti e seguendo il triangolo isoscele VAB si ottiene ancora



$$\overline{EF}:\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{13}}{2}x:\frac{\sqrt{13}}{2}a$$

Da qui si desume che la base minore della sezione vale:

$$\overline{EF}=\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}*\frac{\sqrt{13}}{2}x}{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)a}=\frac{x}{\sqrt{2}}$$

pertanto l'area della sezione vale:

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\frac{3}{2}(a-x)=\frac{3}{4}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)(a-x)=$$

$$\frac{3}{4}\frac{a^2-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{3}{8}\sqrt{2}\left(a^2-x^2\right)$$

▼ quesito d)

e quindi, in base alla regola

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

i volumi richiesti valgono:

$$V1=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{3}{4}\frac{a^2-x^2}{\sqrt{2}}dx=\frac{11a^3}{32\sqrt{2}}=\frac{11}{64}\sqrt{2}a^3$$

$$V2=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{3}{4}\frac{a^2-x^2}{\sqrt{2}}dx=\frac{5a^3}{32\sqrt{2}}=\sqrt{2}a^3$$

Si può facilmente verificare che la somma dei due volumi dà il volume della piramide assegnata.

$$V1+V2=\frac{11}{64}\sqrt{2}a^3+\frac{5}{64}\sqrt{2}a^3=\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$$

■ Problema 3

Il candidato dimostri i seguenti enunciati:

a) Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima;

b) Fra tutti i coni circolari retti circostritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.

Il candidato chiarisca, infine, il significato di $n!$ (fattoriale di n) e il suo legame con i coefficienti binomiali.

Risoluzione

▼ quesito a)

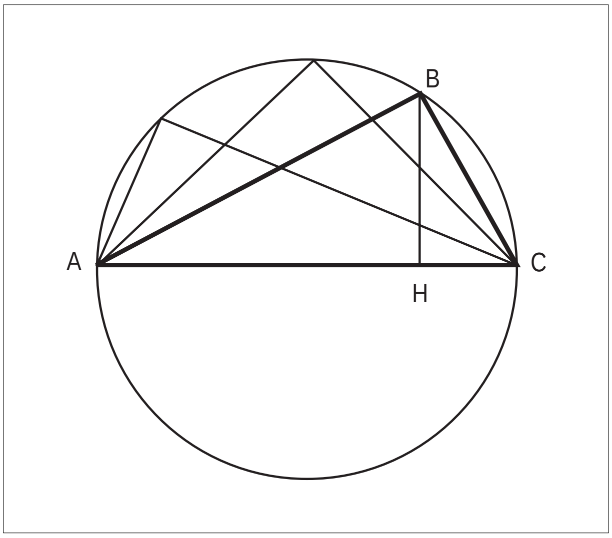
Premesso che tutti i triangoli rettangoli di data ipotenusa sono tutti i triangoli rettangoli inscritti in una semicirconferenza di dato diametro $2r$, la risoluzione del primo quesito è possibile in più modi. Un modo consiste nella seguente risoluzione algebrica.

Poniamo: $\overline{AH}=2x$

segue $\overline{HC}=2r-2x$

e quindi, per il secondo teorema di Euclide,

$$\overline{BH}=\sqrt{2x(2r-2x)}=2\sqrt{(r-x)x}$$



Pertanto

$$S(ABC)=f(x)=\frac{1}{2}*2r*2\sqrt{(r-x)x}=2r\sqrt{(r-x)x}$$

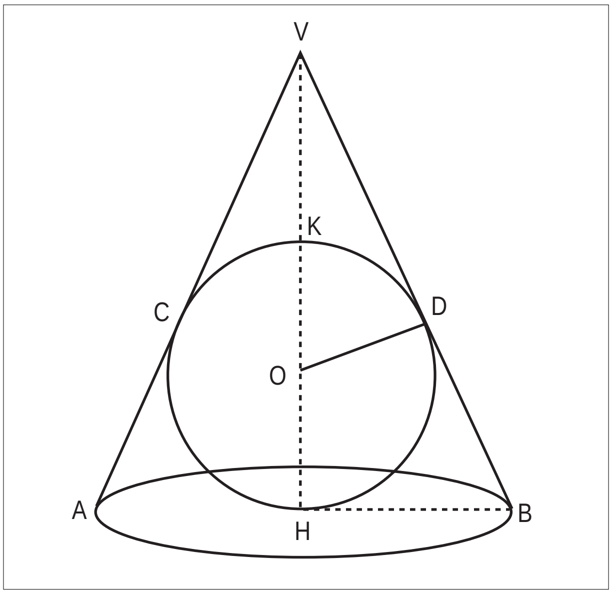
E poiché la derivata prima vale

$$f'(x)=\frac{r(r-2x)}{\sqrt{(r-x)x}}$$

dallo studio del suo segno è facile ricavare che il triangolo diventa massimo quando x = r/2 e quindi quando il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa coincide con il centro. Se ne conclude che il triangolo rettangolo di data ipotenusa, avente area massima, è proprio quello isoscele.

▼ quesito b)

La sfera di raggio r è data.



Posto $\overline{VK} = x$ ed $\overline{HB} = R$ (con R funzione di x), dalla similitudine dei triangoli rettangoli VDO e VHB si ottiene che

$$\overline{VB} = \frac{(x+r)R}{r}$$

Inoltre vale la seguente relazione pitagorica rispetto al triangolo rettangolo VHB

$$(x+2r)^2 + R^2 = \frac{(x+r)^2 R^2}{r^2}$$

da cui, in particolare, si ricava

$$(x+2r)^2 r^2 + R^2 r^2 = (x+r)^2 R^2$$

ed ancora

$$R^2\left(x^2 + 2rx\right) = (x+2r)^2 r^2$$

e quindi che

$$R^2 = \frac{(x+2r)^2 r^2}{\left(x^2+2rx\right)} = \frac{(x+2r)r^2}{x}$$

Poiché la funzione da minimizzare è rappresentata dall'area della superficie laterale del cono si ha

$$f(x) = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB} = \pi R \frac{(x+r)R}{r} = \pi \frac{(x+r)}{r} R^2 =$$

$$= \pi \frac{(x+r)}{r} \frac{(x+2r)r^2}{x} = \pi r \frac{(x+r)(x+2r)}{x}$$

ovviamente per $x>0$.

La sua derivata è

$$f'(x) = Dt\left[\pi r \frac{(x+r)(x+2r)}{x},\quad x\right] = \frac{\pi r}{x^2}\left(x^2 - 2r^2\right)$$

Considerato che la funzione è in grado di rappresentare il problema geometrico solo in corrispondenza di $x>0$, dallo studio del segno della derivata prima si evince facilmente che questa ammette un punto di minimo per $x = \sqrt{2}\, r$.

▼ quesito c)

Infine quanto al significato di $n!$ e del suo legame con i coefficienti binomiali ogni testo di analisi riporta in modo esplicito quanto richiesto dal quesito.

Conclusione

Non c'è dubbio che le tracce assegnate rientrano nell'ambito dei contenuti fissati dal programma ministeriale e, per la verità, sono anche tracce sicuramente fattibili. Fatto salvo magari il caso del secondo quesito del terzo problema dove sarebbe stato il caso di indicare più esplicitamente (suggerendolo) il segmento che va scelto come incognita, visto che talune altre scelte inducono in una serie di calcoli non facilmente controllabili da uno studente medio e talora impossibili senza uno strumento adeguato e visto che ancora si insiste (come recita una delle sopracitate diciture) a non voler introdurre l'uso di una calcolatrice adeguata a tale scopo come potrebbe essere una calcolatrice grafica (CG).

E' più che esplicito, poi, l'invito a dare, nell'insegnamento, più spazio alla geometria: due tracce su tre infatti vertono esclusivamente sulla geometria, ora piana ora solida. In linea di principio ed a titolo personale posso anche essere d'accordo. Ma forse oggi la realtà è un'altra e se il messaggio che si vuol dare è questo, occorre trovare sicuramente un'altra forma per farlo passare.

Nell'Aprile 1999 si è tenuto a Latina un seminario residenziale organizzato dall'IRRSAE Lazio con la collaborazione dell'IRRSAE Emilia Romagna. Nel corso di esso una trentina di insegnanti, divisi in gruppi, hanno presentato e discusso soluzioni di vari problemi realizzati con diversi software. Il problema che segue è uno di quelli proposti ai partecipanti del seminario, i cui atti sono in fase di preparazione.

La soluzione qui proposta, non inserita negli atti, differisce da quelle presentate al seminario nella seconda parte in quanto contiene ulteriori ricerche sulla figura.

Latina 1999

Problema n. 12

di Francesca Del Vecchio

Liceo Scientifico Majorana "Latina"

Sia ABC un qualsiasi triangolo di ortocentro H e sia W la circonferenza ad esso circoscritta. Lasciando fissi due punti, ad esempio A e B, determinare il luogo descritto da H al variare del terzo vertice C su W.

Sia ABC un qualsiasi triangolo e sia W la circonferenza ad esso circoscritta. Siano inoltre W(AB), W(BC), W(CA) le circonferenze simmetriche di W rispettivamente rispetto ad AB, BC, CA. Verificare che le tre circonferenze hanno sempre un punto comune che gode di una particolare proprietà.

Il problema può essere proposto in un biennio di scuola media superiore, dopo aver trattato argomenti quali: poligoni inscritti e circoscritti a circonferenze, triangoli e loro punti notevoli, simmetrie assiali, traslazioni, parallelogrammi, concetto di luogo geometrico, semplici costruzioni con riga e compasso.

Questo problema coinvolge molti concetti e proprietà, pertanto si presenta come un'ottima attività applicativa di sintesi a fine di un periodo di studio. Inoltre permette un buon lavoro di ricerca e sollecita l'uso di capacità intuitive, successivamente consente anche una notevole attività dimostrativa. Alcuni passaggi dovranno essere suggeriti dall'insegnante, perché solo evidenziando taluni segmenti o punti nella figura alcune proprietà divengono facilmente "visibili".

Le abilità impegnate riguardano il riconoscimento di proprietà di figure (in fase esplorativa) e la loro applicazione (in fase dimostrativa). Il lavoro aiuta a sottolineare la differenza fa momenti in cui si esplora, si pongono congetture, si verifica (fase induttiva) e momenti in cui si sistema e si dimostra (fase deduttiva).

Se si vuole arrivare alla dimostrazione del luogo geometrico è importante anche visualizzare le misure degli angoli interni del quadrilatero di cui si dice in seguito, osservando cosa accade al variare di C su W. E' bene esplorare tutte le tipologie di triangolo che possono presentarsi e tale esplorazione va eseguita sempre con occhio vigile e spirito critico in quanto le diverse configurazioni in cui si presenta la figura al variare di C possono richiedere dimostrazioni differenti (qui ne viene presentata in dettaglio una sola).

Tracce della procedura di soluzione

Il software utilizzato è Cabri II.

In riferimento alla figura 1:

Costruiamo la circonferenza W di centro O, un triangolo ABC in essa inscritto e l'ortocentro H di ABC. Costruiamo il *luogo geometrico* descritto da H al variare di C su W ed osserviamo che sembra essere la circonferenza simmetrica di W rispetto ad AB. Per ulteriore conferma possiamo produrre la figura seguente.

In riferimento alla figura 2:

1. Costruiamo nuovamente la circonferenza, il triangolo ABC ed il suo ortocentro H (utilizzando una *macro* eventualmente definita prima; oppure anche si può procedere in modo differente, seguendo il testo del problema: costruiamo il segmento AB, poi una circonferenza W che ha AB come corda, infine fissiamo un punto C su W).
2. Costruiamo usando un colore chiaro la circonferenza W(AB) (qui non visibile in figura) simmetrica di W rispetto alla retta AB utilizzando il comando *simmetria assiale*.
3. Eseguiamo la *traccia* di H al variare di C sulla circonferenza W: osserviamo che ripercorre la circonferenza W(AB).

In riferimento alla figura 3:

1. Ripetiamo la costruzione della 2° figura (eventualmente utilizzando una *macro*).

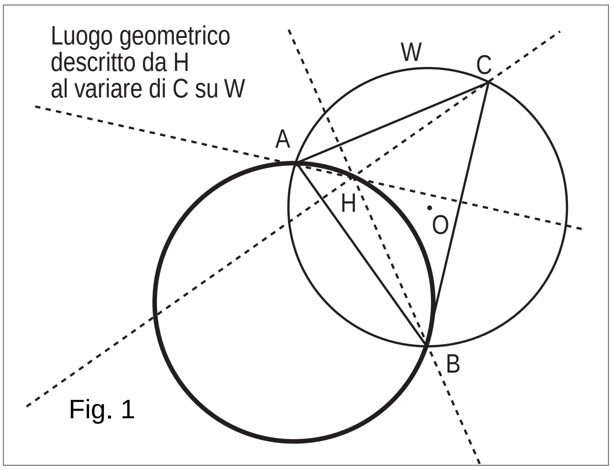


Fig. 1

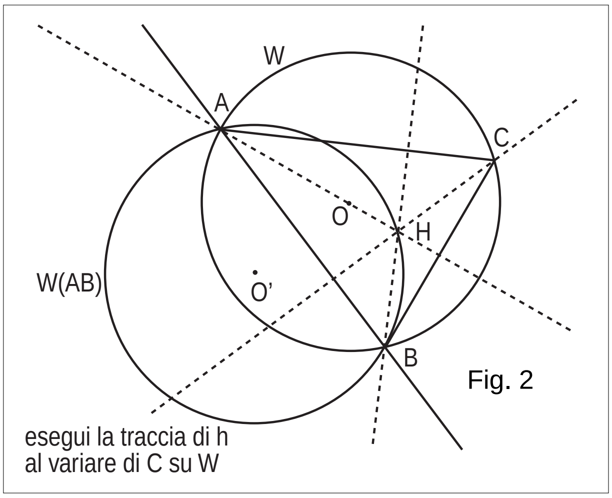


Fig. 2

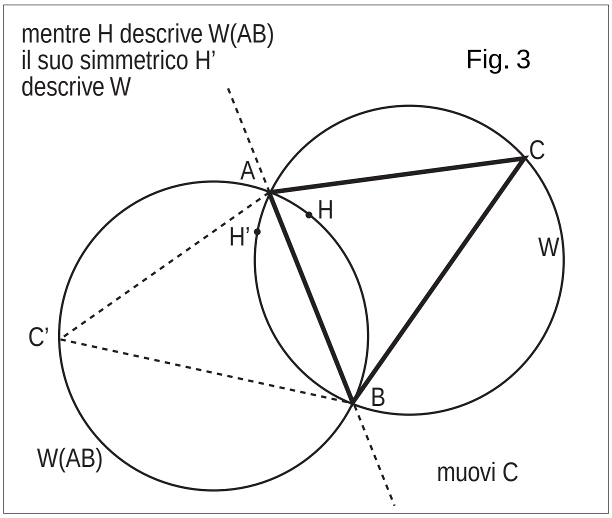
2. Costruiamo il triangolo ABC' *simmetrico* di ABC ed il *simmetrico* H' di H rispetto all'asse AB.
3. Notiamo che al variare di C su W H' descrive la circonferenza W. Questo suggerisce la dimostrazione per via sintetica: se dimostriamo che H' appartiene a W allora il suo simmetrico H' deve appartenere alla circonferenza W(AB).

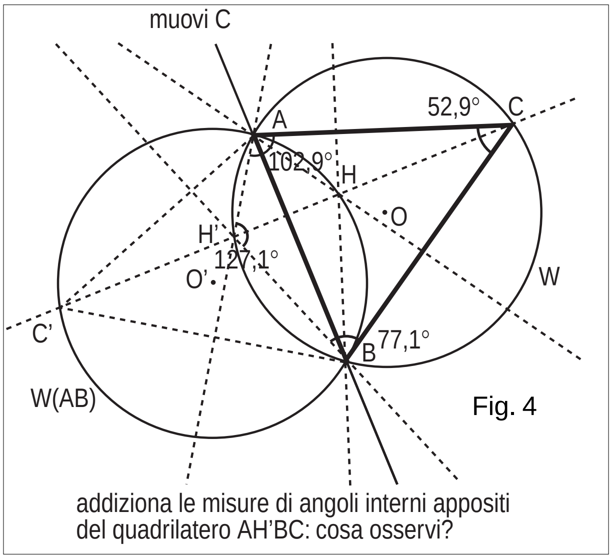
In riferimento alla figura 4:

1. Aggiungiamo alla figura precedente le rette simmetriche delle altezze di ABC nella *simmetria assiale* di asse AB.
2. Evidenziamo la *misura degli angoli* interni del quadrilatero AH'BC ed effettuiamo una esplorazione delle varie configurazioni in cui si presenta il quadrilatero suddetto al variare di C su W (viene qui raffigurato in particolare il caso in cui H' e C non appartengano al medesimo arco AB su W). E' agevole verificare che al variare di C su W angoli interni opposti sono supplementari. Attenzione: per alcune configurazioni gli angoli segnati anziché interni divengono esterni.

***In riferimento alla figura 5** (per la dimostrazione):*

Per dimostrare che H' appartiene a W è sufficiente dimostrare che il quadrilatero che ha per vertici A,B,C,H' (l'ordine dei vertici varia al variare di C su W) è inscritto in W, ovvero che ha angoli opposti supple





mentari. (La figura si riferisce ad un solo caso, quello in cui l’angolo ACB sia acuto e che H’ appartenga all’arco AB non contenente C. In modo analogo si può dimostrare negli altri casi). Tale dimostrazione è banale. Infatti, essendo H’ simmetrico di H nella simmetria avente per asse la retta AB, i triangoli AHB e AH’B sono isometrici; le tre altezze per H individuano triangoli rettangoli dei quali si possono valutare facilmente gli angoli. Posto $B\hat{C}H' = \alpha$ e $B\hat{H}'C = \beta$ risulta dunque:

$A\hat{C}B + A\hat{H}'B = \alpha + (90° - \beta) + \beta + (90° - \alpha) = 180°$

$H'\hat{A}C + H'\hat{B}C = \beta + \alpha\ (90° - \beta) + (90° - \alpha) = 180°$

Pertanto il quadrilatero AH’BC, avendo angoli opposti a due a due supplementari, è inscritto nella circonferenza W.

In riferimento alla figura 6:

Costruiamo le circonferenze *W*(*AB*), *W*(*BC*), *W*(*AC*), *simmetriche* di *W* rispetto ai lati del triangolo ed evidenziamo il *punto d’intersezione*.

E’ evidente, per quanto dimostrato in precedenza, che l’ortocentro *H* appartiene a tutte e tre le circonferenze e dunque ne è l’ulteriore punto di intersezione.

In riferimento alle figure 7 e 8:

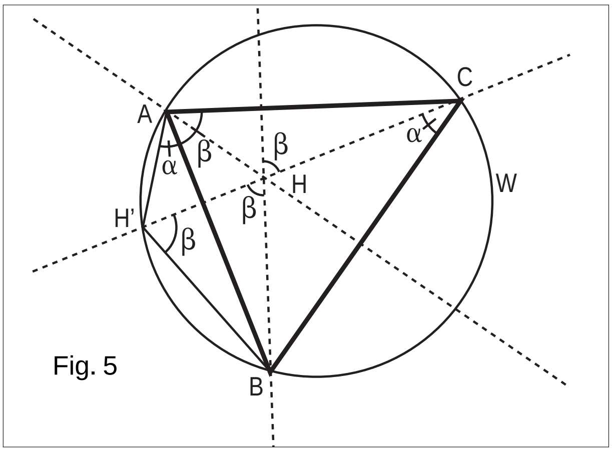
Il luogo geometrico W(AB) prima descritto come circonferenza simmetrica di W rispetto alla retta AB può anche essere interpretato come circonferenza ottenuta da W mediante una traslazione di vettore CH. Costruiamo con *Cabri* il *vettore* CH e verifichiamo che al variare di C su W il secondo estremo del vettore, H, descrive la medesima circonferenza W(AB).

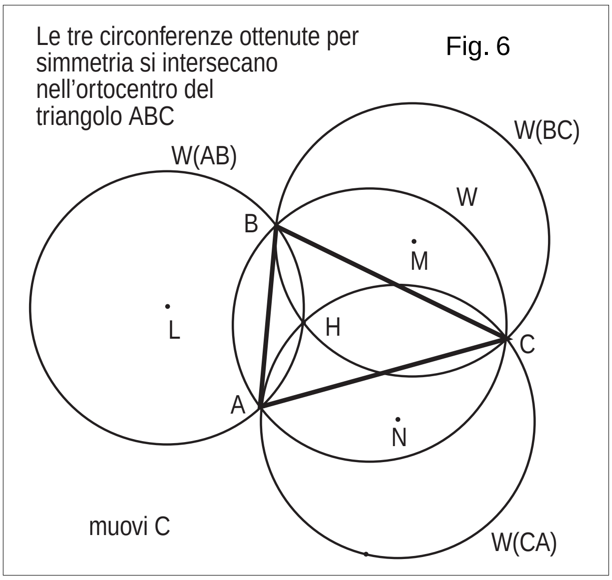
D’altronde, essendo H ortocentro del triangolo ABC, la direzione del segmento CH è sempre perpendicolare ad AB. Dimostriamo ora che rimane invariata anche la sua misura. Essendo simili fra loro i triangoli CHK e ABK si ha CH:AB=HK:BK. Essendo la corda AB fissata l’angolo $A\hat{C}B$ = a si mantiene costante al variare di C su W. Dunque nei triangoli CBY e KBH sarà costante anche l’angolo $C\hat{B}H = (\pi/2\text{-a})$. Al variare di C il triangolo KBH mantiene le ampiezze degli angoli invariate e dunque anche il rapporto fra i lati, HK/BK in particolare. Pertanto fissata la corda AB dalla proporzione soprascritta si deduce che anche la misura di CH è costante.

In riferimento alla figura 9:

Continuando ad esplorare la figura ed aggiungendo ad essa alcuni elementi è possibile individuare altre interessanti proprietà.

Costruiamo il triangolo che ha come vertici i centri L, M ed N rispettivamente delle circonferenze *W*(*AB*), *W*(*BC*), *W*(*AC*) e la circonferenza *W** ad esso circoscritta. (L, M, N, non sono allineati in quanto simmetrici di K rispetto ad assi di simmetria fra loro a due a due non paralleli, pertanto individuano sicuramente una circonferenza). Poiché H appartiene a tutte e tre le circonferenze W(AB), W(BC), W(CA) i centri L, M, N sono equidistanti da esso e dunque appartengono alla circonferenza





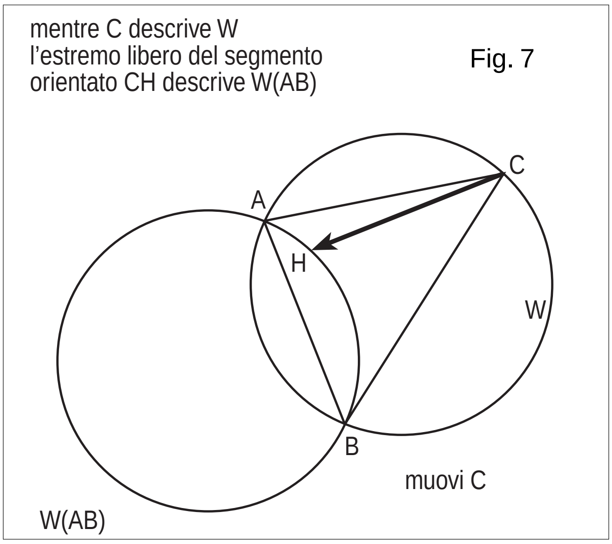


Fig. 7

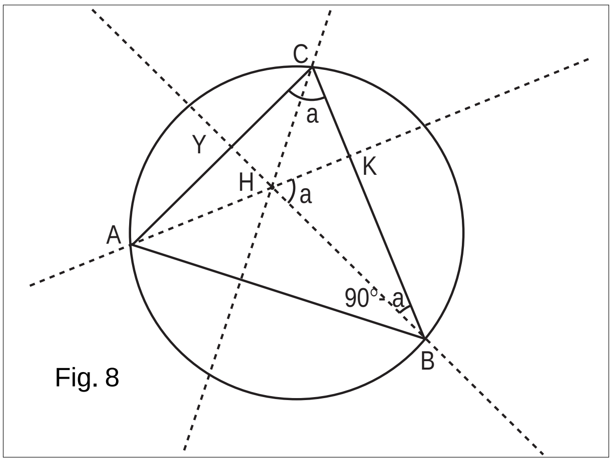


Fig. 8

di centro H isometrica alle altre circonferenze tracciate. In altri termini, il punto H, ortocentro del triangolo ABC, è anche il centro della circonferenza W* passante per i centri delle circonferenze W(AB), W(BC), W(CA) e dunque circocentro del triangolo LMN.

In riferimento alla figura 10:
Si può verificare e poi dimostrare che il triangolo LMN è isometrico al triangolo ABC ed il centro K di W ne è l'ortocentro. Infatti i quadrilateri LANH e HMCN sono parallelogrammi, avendo come lati opposti raggi di circonferenze tra loro isometriche (in realtà sono rombi, ma qui ci basta osservare che sono parallelogrammi!). Pertanto LA, essendo parallelo ad HN, è anche parallelo, oltre che uguale, a MC. Quindi LMCA è un parallelogramma ed in particolare risulta LM = AC. Con analoga dimostrazione risulta AB = MN e BC = LN. Pertanto i due triangoli ABC e LMN sono isometrici per il terzo criterio.
Inoltre, come l'ortocentro H del triangolo ABC è circocentro del triangolo LMN, a sua volta il circocentro K di ABC è ortocentro di LMN.
E' possibile verificare anche che:

1. Il segmento HK ha per asse l'asse radicale delle circonferenze W e W*.
2. I due triangoli si corrispondono nella simmetria centrale che ha come centro il punto medio del segmento HK.

Infine la figura 11 presenta un'altra possibile via per dimostrare che il segmento CH mantiene la sua misura invariata al variare di C su W (questa dimostrazione presuppone però, a differenza della precedente, che si siano già indagate le proprietà della figura utilizzando le simmetrie assiali).

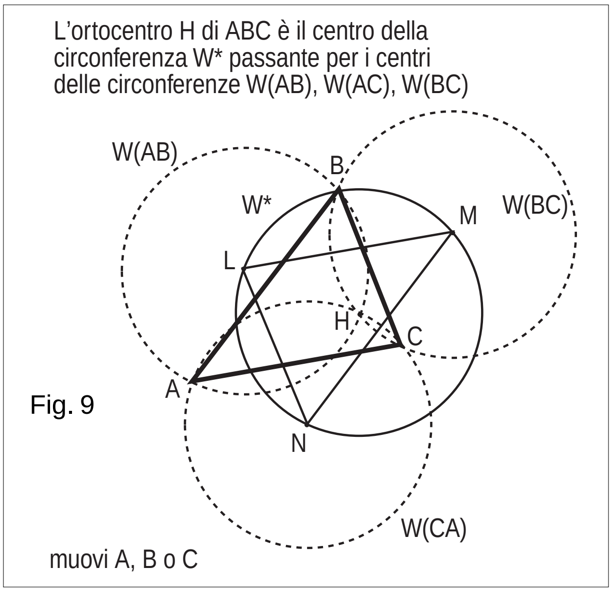


Fig. 9

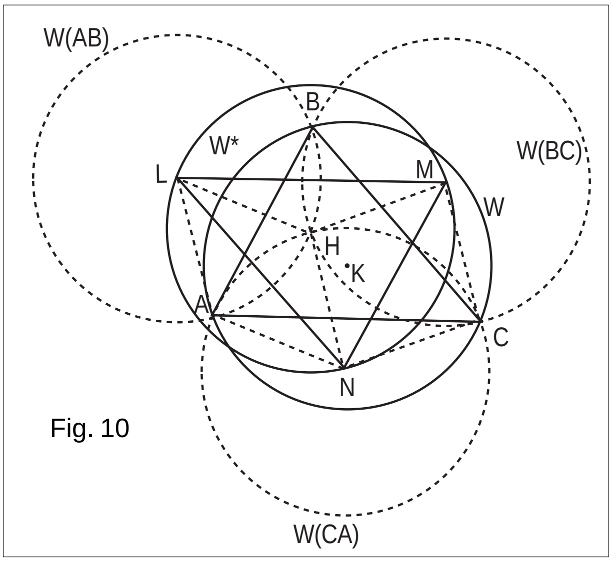


Fig. 10

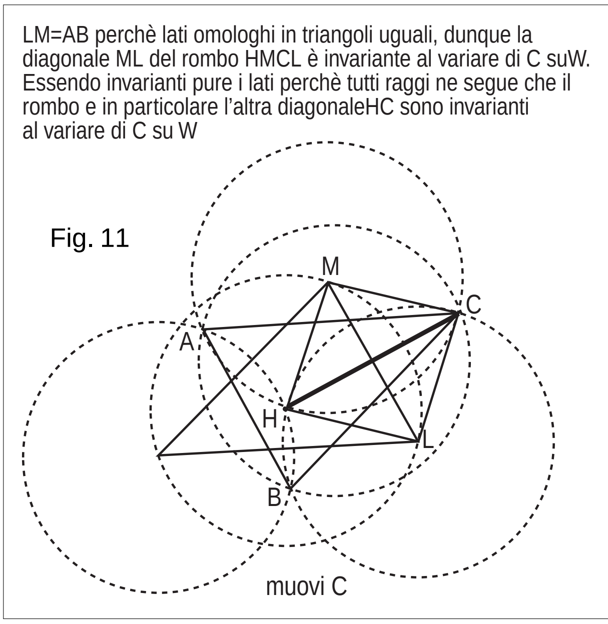
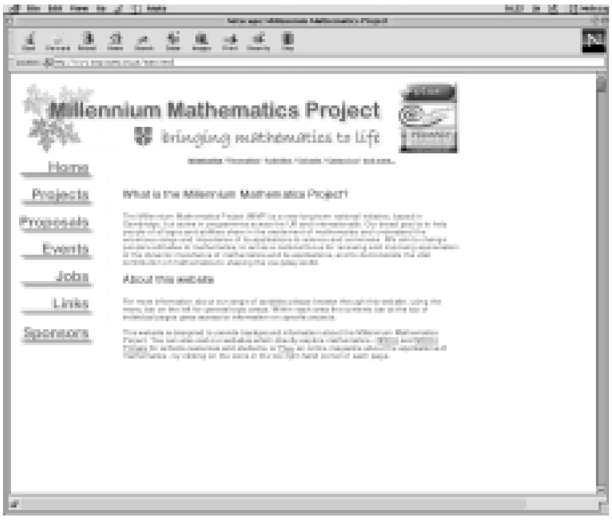


Fig. 11

LA RECENSIONE DEL MESE

Millennium Mathematics

di Federico Peiretti -Torino



Millennium Mathematics Project

http://www.mmp.maths.org.uk/index.html

E’ uno dei più ampi e articolati progetti di didattica della matematica, presentato dall’Università di Cambridge e diretto da John Barrow che ha avuto da poco la cattedra di Scienze Matematiche proprio a Cambridge. Battezzato Millennium Mathematics Project, intende avviare nuove iniziative e coordinare l’attività di due iniziative di grande successo nate sempre a Cambridge quattro anni fa: NRICH online club e la rivista online PLUS indirizzate al mondo della scuola. I responsabili del progetto hanno giustamente pensato che per la diffusione di una autentica cultura matematica è necessario uscire dalle aule scolastiche e coinvolgere non solo i genitori degli studenti, ma “le persone di tutte le età e di interessi diversi per renderle più coscienti dell’importanza e del fascino della matematica e delle sue molteplici applicazioni nella vita di tutti i giorni”. Questo è lo scopo dichiarato dal MMP che prevede la realizzazione di spettacoli itineranti, mostre, trasmissioni televisive, dibattiti e seminari aperti ad un pubblico non specialistico. MMP ha già avviato il progetto Music Plus Plus sui rapporti tra matematica e musica e per la prossima primavera è prevista una mostra sui rapporti fra arte e matematica, The sape of space. La proposta più originale è STIMULUS, un programma di interventi degli studenti universitari nelle scuole, un’iniziativa che sarebbe sicuramente utile adottare anche nel nostro paese.

NRICH

http://www.nrich.maths.org.uk/index.html

E’ un progetto pilota online al quale sono iscritti migliaia di studenti e di insegnanti di ottanta paesi diversi. NRICH è l’acronimo di National Royal Institution Cambridge Homerton, cioè i partner del progetto: la Royal Institution, l’Università di Cambridge e Homerton College.

Al primo di ogni mese, viene messo in rete il nuovo numero di una rivista con problemi e articoli di matematica, rivolti “ agli studenti di tutte le età”. Preziosissimi sono i problemi, divisi per fasce d’età, dai Let me try per ragazzi dai 5 agli 8 anni, ai 15+ Challenge per studenti degli ultimi anni delle superiori. Di tutti i problemi, nel mese successivo a quello della pubblicazione, vengono fornite le soluzioni più interessanti inviate dagli stessi studenti. Ci sono inoltre articoli, giochi, corsi e relazioni di conferenze organizzate da NRICH. Un ricchissimo archivio mette a disposizione tutti i numeri già pubblicati della rivista: materiali insostituibili per arricchire le proprie lezioni o per approfondire la propria preparazione. Chi si iscrive a NRICH si collega a Mailing list, Newsgroup e Newsletter che gli consentono occasioni di confronto e scambio di esperienze online.

PLUS magazine

http://plus.maths.org/index.html

E’ una delle più belle (anche dal punto di vista grafico) riviste di matematica online. Creata, quattro anni fa, allo scopo “sensibilizzare le persone sull’importanza della matematica nella vita di ogni giorno”, si rivolge in particolare agli studenti delle superiori per incoraggiarli a proseguire gli studi di matematica e agli insegnanti per fornire loro nuovi spunti di lavoro.