B.de Finetti - Teoria delle Probabilità - ed. Einaudi 1970

Correzione e rifacimento del par. III,9.10 (pp.132-133); il presente esempio - dovuto al collega prof. Lucio Crisma - va sostituito al precedente che risulta banale e non significativo. Ringrazio vivamente Crisma per l'indovinata costruzione di un esempio ineccepibile.

9.10. Esempio di dipendenza lineare non ovvio.

Supponiamo di sapere che sei individui (che indicheremo 1°,2°,3°,...,6°) abbiano diritto di indicare tre "favoriti" fra gli otto concorrenti a una gara (che indicheremo A,B,C,D, ~~E~~,F,G,H,K); tutti coloro che avranno incluso tra i favoriti il vincitore avranno diritto ad un premio.

Le terne di favoriti dei sei scommettitori siano: 1°) BFG, 2°) ADK, 3°)BDG, 4°)BGH, 5°)DFH, 6°)CGI, infine ABC sia la terna preferita da un nono individuo, che supponiamo sia Tu.

La domanda è questa: il fatto che Tu indovini, evento E, è linearmente dipendente oppur no dagli eventi $E_1,E_2,\dots,E_6$ indicanti l'indovinare degli altri?

Ciò potrebbe ad es. importare in questo caso: Tu hai fiducia nella competenza, nel giudicare delle probabilità degli otto concorrenti, di un esperto, e vorresti sapere quale probabilità hai di vincere in base alla sua opinione. Però non conosci direttamente la sua opinione riguardo alla probabilità di vittoria di ciascun concorrente, ma sai soltanto quali probabilità attribuisce al fatto che ciascuno dei sei scommettitori abbia a vincere. Basterà ciò?

Abbiamo il sistema:

$$\begin{array}{rcl}
1 &=& A+B+C+D+F+G+H+K\\
E_1 &=& B+F+G\\
E_2 &=& A+D+K\\
E_3 &=& B+D+G\\
E_4 &=& B+G+H\\
E_5 &=& D+F+H\\
E_6 &=& C+G+K\\
E &=& A+B+C
\end{array}$$

Risulta che i sei eventi $(E_1,E_2,\dots,E_6)$ sono linearmente indipendenti, mentre l'evento $E=A+B+C$ ne dipende linearmente essendo

$$2E_1+3E_2-E_3+2E_4+4E_5+3E_6+3E=6(A+B+C+D+F+G+H+K)=6$$

da cui $E=\frac{1}{3}(6-2E_1-3E_2+E_3-2E_4-4E_5-3E_6)$.

Perciò, se conosco le $p_i=P(E_i)$ di quell'esperto, posso concludere che nella sua opinione (supposta coerente) $p=P(E)$ dev'essere

$$p=\frac{1}{3}(6-2p_1-3p_2+p_3-2p_4-4p_5-3p_6).$$

Naturalmente, in modo analogo potrò anche vedere se le $p_1\dots p_6$ sono ammissibili (compatibili con la condizione di probabilità nonnegative); se così non fosse il problema non avrebbe senso.

Potrà essere utile esercizio sviluppare tali questioni sul presente esempio (quale è, o modificando qualcosa).